VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

1. Zjednodušte výraz: (tj. při tomto zadání vždy nejprve určíme definiční obor a až potom zjednodušíme):

a) $\frac{1}{1+\cot g^2 x}+\left(\frac{\cos x-\sin x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2$ b) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin(-x)}$ c) $\frac{\sin^2 x-1}{(\cos x-1)\cdot(\cos x+1)}$ d) $\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

e) $(\sin x+\cos x)^2+[\sin(-x)+\cos(-x)]^2$ f) $\frac{1+\cot g^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ g) $\frac{\sin x-\cos x}{\cot g\, x-1}$ h) $1-\frac{\cot g^2 x}{1+\cot g^2 x}$

2. Zjednodušte výraz:

a) $\frac{2\cos^2 x-1}{(1-\sin^2 x)\cdot(1-\operatorname{tg}^2 x)}$ b) $\frac{(\sin x\cdot\cot g\, x)^2-1}{3\sin^2 x}$ c) $\cos x+\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}$ d) $\frac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x}$

e) $2\operatorname{tg} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-\cos^2 x+1-\sin^2 x$ f) $\frac{5\sin^2 x}{\cos x-1}$ g) $(\sin x-\cos x)^2+2\sin x\cos x-\operatorname{tg} x\cot g\, x$

h) $\frac{(\cos x\ \operatorname{tg} x)^2-1}{\cos^2 x}$ i) $2\sin^2 x-\cot g\, x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-5+2\cos^2 x$ j) $8-\operatorname{tg} x\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

k) $\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x-\sin x}+\sin x$ l) $1-\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 x$ m) $\operatorname{tg}^2 y-\frac{1}{\cos^2 y}$ n) $\frac{\cot g^2 x+1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

o) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\cos x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ p) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$ q) $\operatorname{tg}^2 y\cos^2 y+1-\cos^2 y$ r) $\frac{\sqrt{1+\cot g^2 x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

3. Dokažte následující vztahy: (tj. upravte levou stranu rovnice tak, aby se rovnala pravé straně nebo postupujte naopak)

a) $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\cot g x+\cot g y}=\operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} y$ b) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$ c) $\cot g\, x+\cot g\, y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$

4. Zjistěte, za jakých podmínek mají dané výrazy smysl, a pak je zjednodušte:

a) $(\cos y+\sin y)^2+(\cos y-\sin y)^2$ b) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ c) $\frac{\cos^2 z\cdot\operatorname{tg} z}{1-\cos^2 z}$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

e) $\frac{\sin u+\sin v}{\cos u+\cos v}$ f) $(\sin x-\sin^3 x)^{-1}\cdot(\cos x-\cos^3 x)$

5. Užitím vhodných vzorců dokažte, že platí:

a) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ b) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ c) $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg} x$ d) $\cot g(x+2k\pi)=\cot g\, x$

e) $\sin(-x+2k\pi)=-\sin x$ f) $\cos(-x+2k\pi)=\cos x$ g) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ h) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

6. Dokažte, že pro všechna $x\in\mathbf{R}$ platí:

a) $\sin x=\sin(\pi-x)$ b) $\sin x=-\sin(\pi+x)$ c) $\sin x=-\sin(2\pi-x)$ d) $\cos x=-\cos(\pi-x)$

7. Zjednodušte:

a) $-\cos 76^\circ\cos 164^\circ+\sin 76^\circ\sin 164^\circ$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ c) $-\sin 828^\circ\cos 603^\circ+\cos 828^\circ\sin 603^\circ$

d) $-\sin 888^\circ\cos 42^\circ-\cos 888^\circ\sin 42^\circ$ e) $-\cos 32^\circ\cos 118^\circ+\sin 32^\circ\sin 118^\circ$ f) $\cos 254^\circ\cos 134^\circ+\sin 254^\circ\sin 134^\circ$

8. Dokažte, že pro přípustné hodnoty x platí:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin x$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin x$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{4\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x-1}$

9. Zjednodušte, uveďte podmínky, za kterých je výraz definován:

a) $\frac{\sin 2x}{2\cos x}$ b) $\frac{\cos^2 x}{\sin 2x}$ c) $1-\cos 2x$ d) $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$ e) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ f) $\sin 2x\cot g\, x-\cos 2x$

g) $\dfrac{2\cos 2x}{\sin 4x}$ h) $\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}$ i) $\dfrac{1-\sin^2 x+\cos^2 x}{3+3\cos 2x}$ j) $\dfrac{2}{1+\cot g^2 x}-\dfrac{2}{1+tg^2 x}$ k) $\dfrac{1-\sin x-\cos 2x}{\cos x-\sin 2x}$

l) $\dfrac{\sin x-\sin^3 x}{\cos^3 x-\cos x}\cdot tg\,x$ m) $\dfrac{\sin^2 x\cot g\,x}{\sin^2 x-1}$ n) $\dfrac{1+\cos 3x}{\sin 3x}-\dfrac{\sin 3x}{1-\cos 3x}$ o) $\left(\dfrac{1}{\sin\beta-1}+\dfrac{1}{\sin\beta+1}\right)\cot g\,\beta$

p) $\sin 2\gamma(\cos\gamma+\sin\gamma)\cdot(tg\gamma+\cot g\gamma)-\dfrac{2}{\sqrt{1+\cot g^2\gamma}}$

10.* Vyjádřete pomocí sinx výraz: $\sin x+\sin 3x+\sin 5x$

11. Zjednodušte:

a) $-\sin 218° - \sin 202°$ b) $-\cos 477°+\cos 927°$ c) $\sin 82°+\sin 22°$ d) $\sin 92°-\sin 752°$

e) $\cos 301°+\cos 299°$ f) $\cos 15°-\cos 75°$ g) $-\sin 12°-\sin 252°$ h) $-\cos 154°-\cos 746°$

12. Vyjádřete výraz jako součin:

a) $\sin 2x+\sin 3x$ b) $\cos x-\cos 3x$ c) $\cos 2\beta+\cos 4\beta$ d) $\sin 5x-\sin x$

13. Zjednodušte:

a) $-\cos 62°-\cos 58°+\sin 132°-\sin 48°$ b) $\cos 63°-\sin 302°+\cos 3°-\sin 418°$

c) $\sin\dfrac{5}{12}\pi-\cos\dfrac{9}{5}\pi-\sin\dfrac{\pi}{12}-\cos\dfrac{6}{5}\pi$ d) $\sin\dfrac{19}{4}\pi+\cos\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{23}{8}\pi-\cos\dfrac{31}{5}\pi$

14. Zjednodušte:

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$ b) $\cos\left(3\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $-\sin(\beta-30°)-\sin(3\beta+30°)$

15. Rozložte na součin:

a) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ b) $\cos 3x-\cos 5x+\cos 7x$

16. Výraz zjednodušte a uveďte podmínky, za kterých je definován:

a) $\dfrac{\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ b) $\dfrac{tgx+1}{\cot gx+1}$ c) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ d) $\dfrac{\sin x-1}{\cos x+\cos\frac{\pi}{2}}$

e) $\dfrac{tgx}{1+tg^2x}-\dfrac{1}{2}\sin 2x$ f) $\dfrac{\sin 3x+\sin x}{1+\cos 2x}$ g) $\dfrac{2\cot gx}{\sin 2x}-\cot g^2 x$ h) $\dfrac{1-tg^2x}{\cos 2x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Řešení:

1. a) 1, D(f) = **R** - $\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ b) 1+ sin x, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ c) cotg^{2}x, D(f) = **R** - $\{k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$

d) –1, D(f) = **R** - $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ e) 2, D(f) = **R** f) cotg^{2}x, D(f) = **R** - $\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ g) – sin x, D(f) =**R-**$\left\{k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$

h) sin^{2}x, D(f) = **R** - $\{k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$

2. a) 1, D(f) =**R-**$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ b) $-\frac{1}{3}$, **R -** $\{k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$ c) –sinx,**R** - $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ d) –1, D(f) =**R-**$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$

e) 2,D(f) = **R-**$\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ f) $-5(1+\cos x)$,D(f) = **R** - $\{2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$ g) 0, D(f) = **R-**$\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ h) –1,D(f) = **R-**$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$

i) –4, D(f) = **R** - $\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ j) 7, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ k) –cosx, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$

l) cos^{2}x, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ m) –1, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ n) cotg ^{2} x, D(f) = **R** - $\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ o) –cotg x,

D(f) = **R** - $\{k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$ p) 1, D(f) = **R-**$\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$ q) 2sin^2 y, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ r) cotg x, D(f) = **R-**$\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$

4. a) 2, D(f) = **R** b) 1+sin x, D(f) = **R** - $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ c) cotg z , D(f) = **R** - $\left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ d) –2sinx, D(f) = **R**, e) $\mathrm{tg}\frac{u+v}{2}$

$u \pm v \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ f) tg x, D(f) = **R** - $\left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

7. a) $\frac{1}{2}$ b) –sin x , D(f) = **R**, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

9. a) sin x , $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{1}{2}\mathrm{cotg}\, x$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ c) $2\sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$ d) cotg x, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ e) $\mathrm{tg}^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ f) 1, $x \neq k\pi$

g) $\frac{1}{\sin 2x}$, $x \neq \frac{k\pi}{4}$ h) –1, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ i) $\frac{1}{3}$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ j) –2cos2x, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ k) –tg x, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{6}+2k\pi$,

$x \neq \frac{5}{6}\pi+2k\pi$ l) –1, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ m) –tg x, $x \neq k\pi$ n) 0, $x \neq k\frac{\pi}{3}$ o) $-\frac{2}{\cos\beta}$, $\beta \neq k\pi$ p) $2\cos\gamma$, $\gamma \neq k\pi$

10.* využijte součtové vzorce: $9\sin x - 24\sin^3 x + 16\sin^5 x$

11. využijte vzorců pro součet a rozdíl g.funkcí: a) cos 8° b) $-\sqrt{2}\sin 18°$ c) $\sqrt{3}\sin 52°$ d) cos 62° e) cos 1° f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) sin 48° h) 0

12. a) $2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}$ b) $2\sin 2x \sin x$ c) $2\cos 3\beta\cos\beta$ d) $2\cos 3x \sin 2x$

13. a) – cos 2° b) $\sqrt{3}\cos 33°$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\sqrt{3}\sin\frac{25}{24}\pi$

14. a) $\sqrt{3}\sin x$ b) 0 c) $-2\sin 2\beta\cos(\beta+30°)$

15. a) $(2\cos x+1)\sin 2x$ b) $(2\cos 2x-1)\cos 5x$

16. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nahraďte $\sin\frac{\pi}{4}$, případně $\cos\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$, $x \neq \frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $x \neq \frac{5}{4}\pi+2k\pi$ b) tg x, $x \neq \frac{3}{4}\pi+k\pi$,

$x \neq \frac{5}{4}\pi+k\pi$ c) cos x nahraďte $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 1 , $x \neq \frac{3}{4}\pi+k\pi$ d) číslo 1 nahraďte $\sin\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

e) 0, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ f) $2\sin x$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ g) 1, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ h) 0, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$