

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK V PROSTORU

Určete vzájemnou polohu přímek p, q :

1. $p : x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 3 - 3t, t \in \mathbf{R}$
 $q : x = 1 - 2s, y = 2 - s, z = 3 - s, s \in \mathbf{R}.$

Porovnáme rovnice, hledáme totiž společné body daných přímek.

$$1 + 2t = 1 - 2s$$

$$1 + 2t = 2 - s$$

$$3 - 3t = 3 - s, /(-1)$$

Sečteme druhou a třetí rovnici vynásobenou číslem -1 :

$$-2 + 5t = -1$$

$$5t = 1$$

$$t = \frac{1}{5}$$

Dopočítáme ze stále stejných rovnice s :

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{5} = 2 - s$$

$$1 + \frac{2}{5} = 2 - s$$

$$s = \frac{3}{5}$$

Nyní dosadíme za neznámé do první rovnice (ta, co jsme nepoužili) a ověříme, zda je splněna.

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{5} = 1 - 2 \cdot \frac{3}{5}$$

$$\frac{7}{5} = -\frac{1}{5}$$

Vyšla nepravdivá rovnost, proto soustava tří rovnic nemá žádné řešení.

Přímky mohou být mimoběžné a nebo rovnoběžné různé. Rozhodnou směrové vektory přímek.

$$\vec{u}_p = (2; 2; -3), \vec{u}_q = (-2; -1; -1)$$

Protože vektory jsou lineárně nezávislé, jsou přímky p, q mimoběžné.

2. $p : x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2 - 2t, t \in \mathbf{R}$
 $q : x = 1 - r, y = r, z = 6 + 2r, r \in \mathbf{R}$

Porovnáme rovnice, hledáme totiž společné body daných přímek.

$$1 + t = 1 - r$$

$$1 - t = r$$

$$2 - 2t = 6 + 2r$$

Sečteme první a druhou rovnici, získáme $2 = 1$, což je nepravdivá rovnost a proto soustava nemá jako celek řešení.

Přímky mohou být mimoběžné nebo rovnoběžné různé, záleží na lineární závislosti či nezávislosti směrových vektorů.

$$\vec{u}_p = (1; -1; -2), \vec{u}_q = (-1; 1; 2)$$

Vektory jsou lineárně závislé, proto jsou přímky rovnoběžné různé.

3. $p : x = 1 + t, y = 3 + t, z = 2 - 2t, t \in \mathbf{R}$
 $q : x = 2 - r, y = 4 - r, z = 6 + 2r, r \in \mathbf{R}$

Porovnáme rovnice, hledáme totiž společné body daných přímek.

$$1 + t = 2 - r$$

$$3 + t = 4 - r$$

$$2 - 2t = 6 + 2r$$

Sečteme první rovnici s druhou vynásobenou číslem -1 , získáme $-2 = -2$, což je pravdivá rovnost. Zvolené rovnice mají nekonečně mnoho řešení, ale to neznamena, že má nekonečně mnoho řešení i celá soustava. Je nutno vzít jiné dvě rovnice a zjistit co pro ně platí.

Sečteme druhou rovnici vynásobenou číslem 2 s třetí rovnicí.

$$8 = 14$$

Vyšla nepravdivá rovnost, proto opět soustava jako celek nemá řešení a o vzájemné poloze přímek rozhodnou jejich směrové vektory.

$$\vec{u}_p = (1; 1; -2), \vec{u}_q = (-1; -1; 2)$$

Vektory jsou lineárně závislé, proto jsou přímky rovnoběžné různé.

$$4. \quad p : x = 1 + t, y = 3 + t, z = 2 - 2t, t \in \mathbf{R}$$

$$q : x = 2 - r, y = 4 - r, z = 6 + 3r, r \in \mathbf{R}$$

Porovnáme rovnice, hledáme totiž společné body daných přímek.

$$1 + t = 2 - r$$

$$3 + t = 4 - r$$

$$2 - 2t = 6 + 3r$$

Sečteme první rovnici s druhou vynásobenou číslem -1 , získáme $-2 = -2$, což je pravdivá rovnost. Zvolené rovnice mají nekonečně mnoho řešení, ale to neznamena, že má nekonečně mnoho řešení i celá soustava. Je nutno vzít jiné dvě rovnice a zjistit co pro ně platí.

Sečteme druhou rovnici vynásobenou číslem 2 s třetí rovnicí.

$$8 = 14 + r$$

$$r = -6$$

Ze zmíněných dvou rovnic dopočítáme t :

$$3 + t = 4 - r$$

$$3 + t = 4 + 6$$

$$t = 7$$

První rovnice je splněna automaticky a to z důvodu toho, že soustava sestavená z první a druhé rovnice má nekonečně mnoho řešení. Soustava má jedno řešení, tj. $t = -5, r = 6$. Přímky jsou různoběžné a jejich průsečíkem je bod $P[-4; -2; 24]$.

$$5. \quad p : x = 1 + t, y = 3 + t, z = 2 - 2t, t \in \mathbf{R}$$

$$q : x = 2 - r, y = 4 - r, z = 2r, r \in \mathbf{R}$$

Porovnáme rovnice, hledáme totiž společné body daných přímek.

$$1 + t = 2 - r$$

$$3 + t = 4 - r$$

$$2 - 2t = 2r$$

Sečteme první rovnici s druhou vynásobenou číslem -1 , získáme $-2 = -2$, což je pravdivá rovnost. Zvolené rovnice mají nekonečně mnoho řešení, ale to neznamena, že má nekonečně mnoho řešení i celá soustava. Je nutno vzít jiné dvě rovnice a zjistit co pro ně platí.

Sečteme druhou rovnici vynásobenou číslem 2 s třetí rovnicí.

$$8 = 8$$

I tato soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Obě soustavy mají nekonečně mnoho řešení, proto soustava tří rovnic má nekonečně mnoho řešení a přímky jsou rovnoběžné totožné. Tomu odpovídá i lineární závislost směrových vektorů zadaných přímek. $(\vec{u}_p = (1; 1; -2), \vec{u}_q = (-1; -1; 2))$.