

VEKTORY V PROSTORU

- Soustava souřadnic v prostoru, vzdálenost bodů v prostoru, střed úsečky, orientovaná úsečka, vektor, volný vektor, vázaný vektor (konkrétní umístění vektoru), souřadnice vektoru, velikost vektoru, součet vektorů, součin reálného čísla s vektorem, lineární kombinace vektorů, lineární závislost vektorů, skalární součin, odchylka vektorů, kolmost vektorů, vektorový součin, smíšený součin.
-

1. Je dána krychle $ABCDEFGH$ tak, že $A[3, 0, 0]$, $B[3, 3, 0]$, $C[0, 3, 0]$. Určete souřadnice ostatních vrcholů krychle.
2. Vypočítejte souřadnice středu úsečky AB , je-li a) $A[-3, 4, 1]$, $B[3, -8, 5]$ b) $A[2, 0, -7]$, $B[2, 4, 7]$
3. Ověřte, že je trojúhelník ABC pravoúhlý a vypočítejte jeho obsah: $A[3, 2, 1]$, $B[-8, 7, -1]$, $C[-\frac{137}{11}, 0, 6]$.
4. Určete chybějící souřadnici bodu B , víte-li, že $|AB| = 7$. $A[1, 2, 8]$, $B[4, 4, ?]$.
5. Určete vzdálenosti středů úseček AB , CD : $A[2, 1, 3]$, $B[-1, 0, 4]$, $C[5, 4, -4]$, $D[-2, -1, -1]$.
6. Určete velikosti těžnic v trojúhelníku ABC : $A[5, 7, 3]$, $B[1, 3, -2]$, $C[-3, -1, 0]$.
7. Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{AB}$, je-li: a) $A[3, 2, 1]$, $B[1, 2, 3]$ b) $A[-2, -3, 2]$, $B[1, -2, -4]$
8. Jsou dány body $A[1, -2, 3]$, $B[5, 3, 0]$, $C[-7, 1, -4]$. Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky AB , CD byly umístěním a) téhož vektoru b) dvou navzájem opačných vektorů.
9. Určete součet vektorů $\vec{u} + \vec{v}$, je-li dáno:
a) $\vec{u} = (1, 3, 5)$, $\vec{v} = (2, 4, 6)$ b) $\vec{u} = (4, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$
10. Je dán trojúhelník ABC , kde $A[3, 2, -1]$, $B[1, -4, 0]$, $C[-1, 2, 6]$. Vypočítejte souřadnice vektorů $\vec{c} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$, $\vec{a} = \vec{BC}$ a souřadnice těžiště trojúhelníku ABC .
11. Jsou dány body $A[1, 0, 3]$, $B[-3, 0, -1]$, $C[2, 1, 1]$, $D[-1, 0, -3]$, $E[1, 1, 1]$, $F[1, 0, \frac{1}{3}]$, $O[0, 0, 0]$. Pomocí daných bodů si vždy zvolte umístění dvou vektorů a výpočtem zjistěte, které dvojice vektorů tvoří vektory lineárně závislé. (Určete všechny možnosti až na vektory navzájem opačné.)
12. V trojúhelníku ABC je $\vec{c} = (6, -4, 2)$, $\vec{b} = (2, -2, 4)$, kde $\vec{c} = \vec{B} - \vec{A}$, $\vec{b} = \vec{C} - \vec{A}$.
a) Vyjádři pomocí $\vec{c}$, $\vec{b}$ stranu $\vec{a} = \vec{C} - \vec{B}$
b) Vypočítejte souřadnice vektorů, který splývají s těžnicemi trojúhelníku.
c) Vypočítejte velikost úhlu, který svírá těžnice t_c a strana trojúhelníku CB .
13. Rozhodněte, zda vektor $\vec{w}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, jestliže platí:
a) $\vec{w} = (0, 3, 6)$, $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ b) $\vec{w} = (-1, 2, 1)$, $\vec{u} = (1, 3, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$
c) $\vec{w} = (1, -1, 2)$, $\vec{u} = (5, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$
14. Jsou dány vektory $\vec{a} = (0, 1, -3)$, $\vec{b} = (-4, 2, 3)$, $\vec{c} = (3, -5, -2)$. Určete souřadnice vektoru:
a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ c) $\vec{w} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c}$
15. Je dáno $\vec{u} = \vec{AB}$, $A[2, 0, -3]$, $B[-1, 5, 4]$, $\vec{v} = \vec{CD}$, $C[1, -2, 3]$, $D[4, 0, -3]$. Určete souřadnice vektoru:
a) $\vec{a} = 3\vec{u}$ b) $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$ c) $\vec{c} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.
16. Jsou dány vektory $\vec{b} = (1, -2, -5)$, $\vec{c} = (2, -7, 1)$, $\vec{d} = (3, -9, 2)$. Určete souřadnice vektoru $\vec{a}$, platí-li:
a) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = 3\vec{d}$ b) $2\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{c} - \vec{d}$.
17. Zjistěte, zda daná trojice bodů leží na přímce:
a) $A[3, -2, 4]$, $B[7, 0, -2]$, $C[1, -3, 7]$ b) $A[-1, 3, 7]$, $B[2, 2, 5]$, $C[8, 1, 1]$
18. Je dán vektor $\vec{a} = (-12, 4, 14)$, o kterém platí: $\vec{a} = 2\vec{u}$. Určete souřadnice vektoru $\vec{u}$.
19. Jsou dány body $K[2, -4, 3]$, $L[-5, 3, 6]$, $M[-4, -1, 0]$. Vypočítejte souřadnice bodu N , jestliže platí:
a) $\vec{NM} = \vec{KL} = \vec{u}$ b) $\vec{KL} = \vec{u}$, $\vec{NM} = -2\vec{u}$.
20. Jsou dány body $A[4, 2, -3]$, $B[5, -1, 0]$. Určete čísla m, n tak, aby bod $C[2, m, n]$ ležel na přímce AB .

21. Je dán čtyřstěn $ABCD$, $A[0, -2, 1]$, $B[3, 2, -1]$, $C[-1, 4, 2]$, $D[1, 1, 4]$. Označte E střed hrany BC a F střed hrany BD . Vyjádřete vektory $\vec{u} = \vec{AE}$, $\vec{v} = \vec{AF}$, $\vec{w} = \vec{CF}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$, $\vec{d} = \vec{AD}$ a určete také souřadnice vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
22. Vypočítejte velikost vektoru $\vec{v} = \vec{MN}$, jestliže ve zvolené soustavě souřadnic platí:
a) $M[-3, -4, 8]$, $N[-1, 6, -3]$ b) $M[3, 1, -3]$, $N[-2, 5, 4]$.
23. Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u} \cdot \vec{v}$, je-li dáno:
a) $\vec{u} = (3, 3, 5)$, $\vec{v} = (-2, 3, -4)$ b) $\vec{u} = (-2, 4, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 6)$.
24. Jsou dány body $A[1, 3, 2]$, $B[-2, 3, 4]$, $C[0, 2, 4]$. Určete skalární součin vektorů $\vec{u} \cdot \vec{v}$, kde $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$.
25. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou kolmé:
a) $\vec{u} = (7, -9, 3)$, $\vec{v} = (3, -5, -8)$ b) $\vec{u} = (2, 17, -4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$
26. Vypočítejte úhel vektorů:
a) $\vec{u} = (-2, 1, -9)$, $\vec{v} = (-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3})$ b) $\vec{u} = (-11, 2, -10)$, $\vec{v} = (-1, 2, -2)$
27. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte úhel vektorů:
a) $\vec{AC}$, $\vec{EF}$ b) $\vec{AC}$, $\vec{FD}$ c) $\vec{FA}$, $\vec{FH}$ d) $\vec{AF}$, $\vec{AG}$
28. Vypočítejte velikosti stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , jestliže platí:
a) $A[-3, 2, 1]$, $B[-2, 3, -3]$, $C[-1, 1, -1]$ b) $A[2, -2, -1]$, $B[2, -4, -5]$, $C[-6, 2, 5]$
c) $A[0, -1, 3]$, $B[5, 2, -1]$, $C[5, 2, -6]$ d) $A[16, 1, -2]$, $B[-9, 1, -2]$, $C[0, 1, 10]$
29. Jsou dány body: $A[-20, 0, 3]$, $B[-4, 0, 3]$, $C[1, 5\sqrt{3}, 3]$.
a) Určete bod D tak, aby $ABCD$ byl rovnoběžník. b) Vypočítejte velikost úhlu DAB .
30. Jsou dány body: $A[-5, 20, -10]$, $B[4, 8, -10]$, $C[13, -4, 10]$, $D[4, 8, 10]$.
a) Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník. b) Vypočítejte velikost úhlu DAB . c) Vypočítejte velikost úhlu ABD .
31. Jsou dány body $A[11, -3, -2\sqrt{3}]$, $B[-7, -3, -2\sqrt{3}]$, $C[-7, -3, 3\sqrt{3}]$, $D[6, -3, 3\sqrt{3}]$.
a) Dokažte, že $ABCD$ je lichoběžník. b) Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku $ABCD$.
32. Určete odchylku vektoru $\vec{AB}$, kde $A[-5, -3, 8]$, $B[7, 6, -12]$ od os soustavy souřadnic.
33. Určete m tak, aby vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ byly kolmé. $\vec{a} = (9, m, -5)$, $\vec{b} = (-3, 4, 7)$.
34. Jsou dány vektory $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, -4, 3)$. Najděte všechny vektory, které jsou kolmé k oběma daným vektorům.
35. Určete v prostoru dva různoběžné vektory, které jsou kolmé k vektoru $\vec{u} = (5, -4, 3)$.
36. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, velikost jeho podstavné hrany $a = 6$, výška $v = 3\sqrt{2}$. Zvolte vhodně soustavu souřadnic v prostoru a řešte následující úkoly:
a) Dokažte, že vektory $\vec{AV}$ a $\vec{CV}$ jsou kolmé. b) Určete velikost úhlu vektorů $\vec{VA}$ a $\vec{CB}$.
37. Jsou dány vektory $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$, $\vec{c} = (2, -1, 1)$.
Určete souřadnice vektoru $\vec{x}$, platí-li: $\vec{x} \perp \vec{a} \wedge \vec{x} \perp \vec{b} \wedge \vec{x} \cdot \vec{c} = -6$.
38. Určete souřadnice vektoru, jejímž jedním umístěním je vektor $\vec{u}$, pro který platí:
a) $\vec{u}$ leží na ose x b) $\vec{u}$ leží na ose y c) $\vec{u}$ leží na ose z
d) $\vec{u}$ leží v rovině určené souřadnými osami x, y . e) $\vec{u}$ leží v rovině určené souřadnými osami x, z .
39. Určete čísla x, y, z v rovnici $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v}$ je-li: $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 3)$, $\vec{u}_3 = (0, 2, 1)$, $\vec{v} = (-2, 2, 3)$.
40. Zjistěme, zda existují čísla a, b, c , z nichž alespoň jedno je různé od nuly tak, aby platilo: $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{0}$.
a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{u}_2 = (0, -2, 3)$, $\vec{u}_3 = (2, -1, 0)$
b) $\vec{u}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, -1)$, $\vec{u}_3 = (1, 0, 2)$
c) $\vec{u}_1 = (1, -2, 5)$, $\vec{u}_2 = (-3, 3, 2)$, $\vec{u}_3 = (2, 5, -4)$
41. Určete číslo t tak, aby vektor $\vec{u}_3$ byl lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, je-li $\vec{u}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, -5)$ a $\vec{u}_3 = (4, 1, t)$.
42. Určeme t tak, aby vektory $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ a $\vec{v} = (1, 4, t)$ byly navzájem kolmé.
43. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a, b, c jsou si vektory $\vec{u} = (4a, c + 6b, c + 1)$, $\vec{v} = (c + 2, a + 5b, b^2 + 2a)$ rovný?
44. Určete vektor $\vec{v}$ tak, aby platilo $4\vec{u} + 5\vec{v} - 6\vec{w} = \vec{0}$, je-li $\vec{u} = (-2, 2, 8)$, $\vec{w} = (5, -3, 2)$.
45. Určete vektor $\vec{u}$ tak, aby byl kolmý současně k vektorům $\vec{v} = (1, -1, 3)$ a $\vec{w} = (2, 0, 5)$.
46. Body $K[-2, 3, 4]$, $L[-3, -1, 2]$ určují vektor $\vec{z}$, $\vec{z} = \vec{K} - \vec{L}$.
a) Vypočítejte souřadnice vektoru $\vec{z}$.
b) Vypočítejte souřadnice koncového bodu P vektoru $\vec{z}$, jestliže vektor $\vec{z}$ umístíme do počátku soustavy souřadnic.
c) Vypočítejte souřadnice počátečního bodu A vektoru $\vec{z}$, jestliže vektor $\vec{z}$ umístíme do koncového bodu $[-2, 3, 4]$.
d) Určete velikost vektoru $\vec{z}$.

47. V rovnoběžnostěnu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ známe souřadnice $A[-3, 2, 1]$, $B[-4, 3, 2]$, $D[2, 4, -3]$, $A_1[3, 5, 4]$. Vypočítejte souřadnice vrcholů C , B_1 , C_1 , D_1 .
48. Jsou dány body $A[3, 2, 1]$, $B[6, 5 - 4]$, $C[2, 3, 4]$.
a) Dokažte, že body A, B, C tvoří trojúhelník. b) Určete reálná čísla m, n, k, p tak, aby body $R[n, m, 0]$, $S[6, k, p]$ ležely na přímce AB .
49. Vektor $\vec{z} = (4, -4, -20)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, kde $\vec{u} = (4, 2, -2)$, $\vec{v} = (4, 6, 4)$, $\vec{w} = (8, 10, -4)$.
50. Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (4, 3, -5)$.
51. Vypočítejte úhel vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2$:
a) $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -2, 0)$ b) $\vec{v}_1 = (6, 3, -2)$, $\vec{v}_2 = (4, 4, 2)$ c) $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (5, 0, 0)$ d) $\vec{v}_1 = (3, 2, -3)$, $\vec{v}_2 = (-2, -1, 2)$
52. Vypočítejte velikosti úhlů α, β, γ v trojúhelníku ABC :
a) $A[2, 0, 1]$, $B[4, -2, 2]$, $C[1, 6, 3]$ b) $A[1, 3, 0]$, $B[-2, 3, 1]$, $C[-2, 6, -2]$
53. Dokažte, že dané vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou navzájem kolmé.
a) $\vec{u} = (-1, 4, 13)$, $\vec{v} = (-6, 5, -2)$ b) $\vec{u} = (-2, 1, 4)$, $\vec{v} = (-2, 2, 4)$ c) $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$
54. Určete p tak, aby vektor $\vec{a} = (-2, 2, 2)$ byl kolmý k vektoru $\vec{b} = (0, p, 1)$.
55. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný a pravoúhlý. $A[2, 1 - 5]$, $B[0, -1, -4]$, $C[2, -2, 2]$.
56. Trojúhelník ABC je určen dvěma vrcholy A, B a těžištěm T . Určete souřadnice vrcholu C . $A[2, 0, 4]$, $B[0, -2, 4]$, $T[1, 1, 1]$.

ŘEŠENÍ:

1. $D[0;0;0]$, $E[3;0;3]$, $F[3;3;3]$, $G[0;3;3]$, $H[0;0;3]$ 2.a) $S_{AB}[0; -2; 3]$, b) $S_{AB}[2; 2; 0]$ 3. Stačí určit, zda je některý ze skalárních součinů vektorů, které jsou určeny stranami trojúhelníku, roven nule. Pravý úhel je u vrcholu B . Obsah pravoúhlého trojúhelníku je roven polovině obsahu obdélníku, jehož úhlopříčkou je přepona trojúhelníku a odvěsny jsou jeho strany. Nebo-li obsah pravoúhlého trojúhelníku je roven součinu délek odvěsen děleno dvěma.
 $S = \frac{105\sqrt{194}}{22} \cong 66,48 \text{ cm}^2$. 4. Souřadnice z bodu B je rovna 14 nebo 2. 5. $\sqrt{38}$. 6. $t_c = \frac{7\sqrt{5}}{2}$, $t_a = 2\sqrt{22}$, $t_b = 3,5$
7.a) $\vec{v} = (-2; 0; 2)$ b) $\vec{v} = (3; 1; -6)$ 8.a) $D[-3; 6; -7]$ b) $D[-11; -4; -1]$ 9.a) $(3; 7; 11)$ b) $(4; 1; 2)$
10. $\vec{c} = (-2; -6; 1)$, $\vec{b} = (-4; 0; 7)$, $\vec{a} = (-2; 6; 6)$, $T[1, 0, \frac{5}{3}]$. Těžiště lze spočítat ze vzorce: $T = \frac{A+B+C}{3}$. 11. Lineárně závislé jsou tyto dvojice sestavené z vektorů $\{\vec{AD}, \vec{AO}, \vec{DO}\}$ či dvojice vektorů $\{\vec{BF}, \vec{BO}\}$. Celkem lze ze zadaných vektorů vytvořit 20 různých vektorů (až na navzájem opačné). 12.a) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ b) Z náčrtku: $t_a = A\vec{S}_{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = (4; -3; 3)$
 $t_b = B\vec{S}_{AC} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = (-5; 3; 0)$ $t_c = C\vec{S}_{AB} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} = (-1; 0; 3)$ Těžnice lze určit i opačnými vektory k uvedeným (stačí vyměnit koncový a počáteční bod). c) Hledáme odchylku vektoru $\vec{CB}$ a $C\vec{S}_{AB}$. $\varphi = 130^\circ 12'$.
13.a) není lineární kombinací. b) není lineární kombinací c) ano, $\vec{w} = \frac{4}{5}\vec{u} - 2\vec{v}$ 14.a) $\vec{u} = (-4; 3; 0)$ b) $\vec{v} = (-1; -4; 4)$
c) $\vec{w} = (-23; 32; 7)$ 15.a) $\vec{a} = (-9; 15; 21)$ b) $\vec{b} = (0; 7; 1)$ c) $\vec{c} = (-15; 4; 32)$ 16.a) $\vec{a} = (6; -15; -1)$
b) $\vec{a} = (1; -4; 3)$ 17.a) ano, mají-li body ležet na jedné přímce, pak vektory z nich vytvořené, musí být lineárně závislé, např. $\vec{AB} = -2\vec{AC}$. b) ne, vektory z bodů vytvořené nejsou lineárně závislé, tj. neleží na jedné přímce.
18. $\vec{u} = (-6; 2; 7)$ 19.a) $N[3; -8; -3]$, b) $N[-18; 13; 6]$ 20. Aby body ležely na přímce, musí být vektory z nich vytvořené lineárně závislé např.: $\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$, $m = 8$, $n = -3$ 21. Využijte náčrtku a poznatku o grafickém sčítání vektorů, násobení vektoru číslem a opačném vektoru. $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = (1; 5; -\frac{1}{2})$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b} = (2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\vec{w} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b} = (3; -\frac{13}{2}; -\frac{1}{2})$. 22.a) $|\vec{v}| = 15$ b) $|\vec{v}| = 3\sqrt{10}$ 23.a) -17 b) 2 24. 7 25.a) ne, skalární součin je různý od nuly. b) ano, skalární součin je roven nule 26.a) $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ b) $\varphi = 38^\circ 57'$ 27. Využijeme náčrtku krychle ABCDEFGH a její umístění do soustavy souřadnic např.: $A[0; 0; 0]$, $B[1; 0; 0]$, $C[1; 1; 0]$, $D[0; 1; 0]$, $E[0; 0; 1]$, $F[1; 0; 1]$, $G[1; 1; 1]$, $H[0; 1; 1]$. Některé úhly lze odvodit i stereometricky, tj. ze vzájemné polohy stěn, stran či úhlopříček krychle, dle vět o kolmosti, lze však převést řešení na vektory. a) odchylka vektorů $\vec{AC}, \vec{EF}$ je rovna odchylce vektorů $\vec{AC}, \vec{AB}$, $\varphi = 45^\circ$ b) odchylka vektorů $\vec{AC} = (1; 1; 0)$, $\vec{FD} = (1; -1; 1)$ je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ c) odchylka vektorů $\vec{FA} = (-1; 0; -1)$, $\vec{FH} = (-1; 1; 0)$ je $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, d) odchylka vektorů $\vec{AF} = (1; 0; 1)$, $\vec{AG} = (1; 1; 1)$ je $\varphi = 35^\circ 16'$ 28.a) $a = 3, b = 3, c = 3\sqrt{2}$, trojúhelník je pravoúhlý a rovnoramenný, $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ$ b) $a = 10\sqrt{2}, b = 2\sqrt{29}, c = 2\sqrt{5}, \alpha = 131^\circ 38', \beta = 34^\circ 42', \gamma = 13^\circ 40'$ c) $a = 5, b = \sqrt{115}, c = 5\sqrt{2}, \alpha = 22^\circ 37', \beta = 124^\circ 27', \gamma = 32^\circ 56'$ d) $a = 15, b = 20, c = 25$, trojúhelník je pravoúhlý $\alpha = 36^\circ 52', \beta = 53^\circ 08', \gamma = 90^\circ$ 29.a) $D[-15; 5\sqrt{3}; 3]$ b) $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ 30.a) ano, stačí např. dokázat, že vektor $\vec{AB} = \vec{DC}$ b) $53^\circ 08'$ c) 90° 31.a) Využijeme náčrtek. Stačí např. dokázat, že vektory $\vec{AB}, \vec{CD}$ jsou lineárně závislé a vektory $\vec{BC}, \vec{AD}$ jsou lineárně nezávislé. b) $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ, \delta = 120^\circ$. Lichoběžník je pravoúhlý. 32.a) od osy x : $\varphi = 61^\circ 19'$, od osy y : $\varphi = 68^\circ 54'$, od osy z : $\varphi = 143^\circ 08'$. 33. $m = 15,5$ 34. nekonečně mnoho vektorů, všechny jsou lineárně závislé, lze je umístit na jednu přímku: $\vec{w} = k \cdot (1; -5; -7)$, $k \in \mathbf{R}$ 35. takových dvojic vektorů je nekonečně mnoho, např. $\vec{v}_1 = (0; 3; 4)$, $\vec{v}_2 = (4; 5; 0)$. 36. Soustava souřadnic lze zvolit různě, např.: $A[0; 0; 0]$, $B[6; 0; 0]$, $C[6; 6; 0]$, $D[0; 6; 0]$, $V[3; 3; 3\sqrt{2}]$. a) Stačí se přesvědčit, že skalární součin daných vektorů je roven nule. b) 60° 37. $\vec{x} = (-3; 3; 3)$ 38.a) $\vec{u} = (x, 0, 0)$, $x \in \mathbf{R}$ b) $\vec{x} = (0; y; 0)$, $y \in \mathbf{R}$ c) $\vec{u} = (0; 0; z)$, $z \in \mathbf{R}$ d) $\vec{u} = (x; y; 0)$, $x, y \in \mathbf{R}$, e) $\vec{u} = (x; 0; z)$, $x, z \in \mathbf{R}$ 39. $x = -2, y = 0, z = 1$ 40.a) taková čísla neexistují b) taková čísla neexistují c) takových čísel a, b, c existuje nekonečně mnoho, všechny možnosti lze vyjádřit např.: takto: zvolíme $c = k$, pak ostatní čísla b, a je nutno dopočítat: $b = 3k, a = 7k$. Jedno z řešení dostaneme tak, že za k dosadíme konkrétní reálné číslo, např.: $a = 7, b = 3, c = 1$. 41. $t = -9$ 42. $t = -1$ 43. Takové hodnoty

číslel a, b, c neexistují. **44.** $\vec{v} = (\frac{38}{5}; -\frac{26}{5}; -4)$ **45.** nekonečně mnoho vektorů, všechny jsou lineárně závislé, lze je umístit na jednu přímku: $\vec{w} = k \cdot (-5; 1; 2), k \in \mathbf{R}$ **46.a)** $\vec{z} = (1; 4; 2)$ **b)** $P[1; 4; 2]$ **c)** $A[-3; -7; 2]$ **d)** $\sqrt{21}$ **47.** $C[1; 5; -2], B_1[2; 6; 5], C_1[7; 8; 1], D_1[8; 7; 0]$ **48.a)** Body A, B, C tvoří trojúhelník, jestliže neleží na jedné přímce, tj. stačí dokázat, že např. vektory $\vec{AB}, \vec{AC}$ jsou lineárně nezávislé. Body A, B, C tvoří trojúhelník. **b)** počítáme pro každý bod zvlášť. Má-li bod R ležet na přímce AB , pak vektory vytvořené z bodů R, A, b musí být lineárně závislé. $m = \frac{13}{5}, n = \frac{18}{5}, k = 5, p = -4$. **49.** $\vec{z} = \frac{38}{9}\vec{u} + \frac{11}{3}\vec{v} - \frac{31}{9}\vec{w}$. **50.** $|\vec{u}| = 5\sqrt{2}$ **51.a)** $\varphi = \frac{\pi}{3}$ **b)** $\varphi = 40^\circ 22'$ **c)** $\varphi = 90^\circ$ **d)** $\varphi = 174^\circ 14'$ **52.a)** $\alpha = 128^\circ 14', \beta = 35^\circ 32', \gamma = 15^\circ 48'$ **b)** $\alpha = 61^\circ 50', \beta = 77^\circ 05', \gamma = 41^\circ 05'$ **53.a)** ano **b)** ne **c)** ano **54.** $p = -1$ **55.** Pomocí vektorů určených podle stran trojúhelníku určíme velikosti stran, pravý úhel zjistíme pomocí skalárního součinu.