

VEKTOROVÝ SOUČIN, SMÍŠENÝ SOUČIN

- Vektorový součin, smíšený součin, obsah rovnoběžníku, obsah trojúhelníku, objem rovnoběžnostěny, objem čtyřstěnu, objem trojbokého hranolu.

1. Určete vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, jestliže platí:
a) $\vec{u} = (2; 3; 1), \vec{v} = (-3; -4; -2)$ b) $\vec{u} = (-5; 7; 3), \vec{v} = (2; -3; -1)$ c) $\vec{u} = (7; -12; 4), \vec{v} = (3; -5; 2)$
d) $\vec{u} = (3; 2; 1), \vec{v} = (2; -1; 4)$ e) $\vec{u} = (3; 1; 0), \vec{v} = (2; 0; 1)$ f) $\vec{u} = (-1; 2; 3), \vec{v} = (-2; 4; 6)$ g) $\vec{u} = (1; 2; 0), \vec{v} = (4; 3; 0)$
2. Určete vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, jestliže platí $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AC}$ a přitom:
a) $A[4; 6; -3], B[3; 7; -5], C[8; 4; 0]$ b) $A[-1; 5; -2], B[2; -6; 3], C[1; -1; 1]$
3. Najděte alespoň jeden vektor, který je kolmý k daným vektorům $\vec{a} = (-6; 0; 12), \vec{b} = (-2; -3; 6)$.
4. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u} = (2; 3; -2), \vec{v} = (-3; -4; 2)$.
5. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku s vrcholy:
a) $A[1; 4; 5], B[-2; 6; -1], C[3; -2; 2]$ b) $A[2; 3; -1], B[2; 1; 3], C[5; 5; 1]$
6. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku s vrcholy:
a) $A[3; -1], B[-3; 5], C[7; 2]$ b) $O[-1; -3], P[-6; 2], Q[1; 1]$
7. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku ABC a velikost úhlu CAB , jestliže platí:
 $A[-6; 4; -2\sqrt{3}], B[1; -2; 3\sqrt{3}], C[-2; 2; -2\sqrt{3}]$.
8. Jsou dány vektory $\vec{a} = (-1; 2; 3), \vec{b} = (3; 1; -2), \vec{c} = (1; 2; -1)$. Určete souřadnice vektoru x , který je kolmý k vektoru $\vec{a}$ i k vektoru $\vec{b}$ a přitom $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$.
9. Vypočítejte objem rovnoběžnostěny $ABCDEFGH$, jestliže je dáno:
a) $A[1; 2; 1], B[7; 3; 0], D[-1; 5; 2], E[1; 0; 6]$ b) $A[1; -2; -3], B[4; 1; -1], D[-3; 3; 1], E[2; 0; 5]$
10. Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, jestliže je dáno: $A[5; 2; -3], B[-3; 4; -1], C[-1; -1; 3], D[-1; 1; -2]$
11. Jsou dány body $A[-2; 1; 4], B[-1; 0; -1], C[-4; -1; 6], D[-2; -2; -5]$
a) Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$.
b) Určete vektor, který je kolmý ke stěně ABC .
c) Určete vektor, který je kolmý ke stěně ABD .
12. Jsou dány body $A[3; 1; -2], B[-1; 1; -2], C[1; 6; 10], D[3; 4; -2]$
a) Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$. b) Vypočítejte povrch čtyřstěnu $ABCD$.
13. Jsou dány vektory $\vec{a} = (3; -1; 2), \vec{b} = (2; -3; 1), \vec{c} = (-4; 2; 3)$. Určete:
a) souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, je-li $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}, \vec{v} = \vec{b} \times \vec{c}$. b) obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}$.
14. Vypočítejte obsah rovnoběžníku $MNOP$, jestliže znáte souřadnice vrcholů M, N, O . Určete souřadnice vrcholu P .
a) $M[0; 1; 2], N[-1; 1; 3], O[2; 1; 4]$ b) $M[3; 1], N[0; 2], O[-1; 4]$
15. Vypočítejte obsah trojúhelníku KLM , znáte-li souřadnice vrcholů:
a) $K[0; -1; 4], L[4; -1; 2], M[3; 4; 5]$ b) $K[2; -1], L[-1; 4], M[3; 2]$
c) $K[3; 5; -6], L[4; 1; 8], M[5; -3; 22]$ d) $K[-3 + 2\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}; \sqrt{3}], L[2\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; \sqrt{3}], M[\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$
16. Vypočítejte obvod, vnitřní úhly a obsah trojúhelníku XYZ , jsou-li souřadnice vrcholů $X[0; 1; 4], Y[0; -2; 1], Z[-3; -2; 4]$.
17. Jsou dány vektory $\vec{u} = (2; 3; 4), \vec{v} = (-2; n; 0)$. Určete hodnotu parametru $n \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo:
a) $|\vec{u} \times \vec{v}| = 2\sqrt{3}$. b) $|\vec{u} \times \vec{v}| = 4\sqrt{6}$.
18. Na ose y určete bod Y tak, aby obsah trojúhelníku ABY byl 10. Souřadnice bodů A, B jsou $A[0; 1; 2], B[3; 2; 2]$.
19. Na ose x určete bod X tak, aby obsah trojúhelníku AXB byl 3. Souřadnice bodů A, B jsou $A[0; 4], B[-4; 2]$.
20. Jsou dány vektory $\vec{a} = (-1; 2; 4), \vec{b} = (2; 3; 1)$.
Určete hodnotu parametru $q \in \mathbf{R}$ tak, aby pro vektor $\vec{z} = (1; q; 2)$ platilo $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp (\vec{z} \times \vec{b})$.
21. Jsou dány vektory $\vec{u} = (0; -1; 3), \vec{v} = (2; 9; -3)$. Určete souřadnice vektoru $\vec{z}$ tak, aby platilo $\vec{z} \perp \vec{u} \wedge \vec{z} \perp \vec{v} \wedge |\vec{z}| = \sqrt{77}$.
Řešte úlohu dvěma způsoby:
a) užitím vektorového součinu b) užitím skalárního součinu.
22. V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ známe souřadnice vrcholů $E[1; 0; 2], F[3; 4; 3], H[-1; 4; 6], A[2; 1; -5]$.
a) Vypočítejte souřadnice vrcholů G, B, C, D . b) Vypočítejte objem rovnoběžnostěny $ABCDEFGH$.

23. Jsou dány body $A[-1; 2; 3]$, $B[4; -2; 8]$, $C[0; 6; 0]$, $A_1[4; 2; 1]$.
 a) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. b) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $ABDC A_1 B_1 C_1 D_1$.
24. Vypočítejte objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, znáte-li souřadnice bodů $A[4; 3; 2]$, $B[-2; 4; -1]$, $C[-5; 0; 2]$, $V[1; 2; 3]$.
25. Vypočítejte objem trojbokého hranolu $ABCDEF$, znáte-li souřadnice vrcholů $A[0; 0; 3]$, $B[0; 0; 0]$, $C[0; 3; 0]$, $D[6; 0; 0]$.
26. Jsou dány body $A[3; 2; 2]$, $B[0; 3; 6]$, $C[-1; -1; 3]$.
 a) Je-li dán bod $D[0; 0; 0]$, pak jaký je objem čtyřstěnu $ABCD$.
 b) Na ose x určete bod V tak, aby objem čtyřstěnu $ABCV$ byl 26.
27. Na ose z určete bod Z tak, aby objem čtyřstěnu $ABCZ$, kde $A[-3; 2; 1]$, $B[0; 1; 3]$, $C[1; 3; -1]$, byl 14.
28. Pomocí smíšeného součinu odvoďte vzorec pro objem krychle o délce strany a .
29. Pomocí smíšeného součinu odvoďte vzorec pro objem pravidelného šestibokého hranolu o výšce h a délce podstavné hrany d .

ŘEŠENÍ: 1.a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-2; 1; 1)$ b) $\vec{u} \times \vec{v} = (2; 1; 1)$ c) $\vec{u} \times \vec{v} = (-4; -2; 1)$ d) $\vec{u} \times \vec{v} = (9; -10; -7)$ e) $\vec{u} \times \vec{v} = (1; -3; -2)$
 f) $\vec{u} \times \vec{v} = (0; 0; 0) = \vec{0}$ g) $\vec{u} \times \vec{v} = (0; 0; -5)$ 2.a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-1; -5; -2)$ b) $\vec{u} \times \vec{v} = (-3; 1; 4)$ 3. např. $\vec{a} \times \vec{b} = (36; 12; 18)$ nebo jakýkoliv jeho násobek např. $(6; 2; 3)$. 4. $S = 3$ 5.a) $S \cong 21, 98$ b) $S = 9$ 6.a) $S = 21$ b) $S = 15$ 7. $S = 15$, $\alpha = 45^\circ$ 8. $\vec{x} = (3; -3; 3)$ 9.a) $V=108$ b) $V=178$ 10. $V=18$ 11.a) $V=2$ b) nap. : $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-12; 8; -4)$ a každý jeho násobek, např.: $(3; -2; 1)$. c) např. $\vec{AB} \times \vec{AD} = (-6; 9; -3)$ a každý jeho násobek, např.: $(2; -3; 1)$.
 12.a) $V = 24$ b) $P \cong 81, 1$. Povrch čtyřstěnu je roven součtu obsahů všech jeho čtyř stěn tj. součet obsahů čtyř obsahů trojúhelníků. 13.a) $\vec{u} = (5; 1; -7)$, $\vec{v} = (-11; -10; -8)$ b) $S = 5\sqrt{3}$ 14.a) $S = 4$, $P[3; 1; 3]$ b) $S = 5$, $P[2; 3]$ Body z roviny dostaneme do prostoru tak, že k nim přidáme stejnou z -ovou souřadnici, tj. např.: nulu. 15.a) $S = 5\sqrt{6}$
 b) $S = 7$ c) Obsah vyjde nulový, proto body K, L, M netvoří trojúhelník, protože leží na jedné přímce. Jde postupovat i opačně, pokud si všimneme, že vektory určující strany trojúhelníku jsou lineárně závislé, musí body ležet na jedné přímce, proto netvoří trojúhelník a proto i obsah trojúhelníku vyjde nulový. d) $S = \sqrt{85}$ 16. $\alpha = 9\sqrt{2}$, trojúhelník je rovnostranný, proto $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, $S = \frac{9}{2}\sqrt{3}$. 17.a) takové n neexistuje. b) $n = -1$, $n = -\frac{1}{5}$ 18. Bod Y leží na ose y , proto je jeho x -ová a z -ová souřadnice rovna nule. $Y_1[0; 1 - 2\sqrt{10}; 0]$, $Y_2[0; 1 + 2\sqrt{10}; 0]$. 19. Bod X leží na ose x , proto je jeho y -ová a z -ová souřadnice rovna nule. $X_1[-5; 0; 0]$, $X_2[-11; 0; 0]$. 20. $q = -16, 5$ 21. $z_1 = (-6\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, $z_2 = (62; -\frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$
 22.a) $G[1; 8; 7]$, $B[4; 5; -4]$, $C[2; 9; 0]$, $D[0; 5; -1]$ b) $V = 110$ 23.a) $V = 88$ b) $V = 88$
 24. $V = 9$ 25. $V = 27$ 26.a) $V = 6, 5$ b) $V[15; 0; 0]$ nebo $V[9; 0; 0]$. Vrchol leží na ose x , proto je jeho y -ová a z -ová souřadnice rovna nule. 27. $Z[0; 0; 17]$ nebo $Z[0; 0; -7]$. Bod Z leží na ose z , proto je jeho x -ová a y -ová souřadnice rovna nule. 28. Krychli o straně délky a umístíme do soustavy souřadnic, např.: $A[0; 0; 0]$, $B[a; 0; 0]$, $C[a; a; 0]$, $D[0; a; 0]$, $E[0; 0; a]$, $F[a; 0; a]$, $G[a; a; a]$. Dále již postupujeme stejně jako dříve, tj. přes smíšený součin vyjadřující objem rovnoběžnostěnu. $V = a^3$. 29. Podstavou je pravidelný šestiúhelník, umístíme šestiboký hranol do soustavy souřadnic v prostoru a poté využijeme smíšeného součinu pro vyjádření objemu rovnoběžnostěnu a poznatku, že pravidelný šestiboký hranol se skládá ze tří shodných rovnoběžnostěnů. Umístění do soustavy souřadnic je např.: $A[0; 0; 0]$, $B[d; 0; 0]$, $F[-\frac{d}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}d; 0]$, $H[0; 0; h]$. Pak $V = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}d^2h$.