

## POSLOUPNOSTI

- pojem posloupnost, člen posloupnosti, konečná a nekonečná posloupnost, graf posloupnosti, rostoucí a klesající posloupnost, zápis posloupnosti (rekurentní vzorec posloupnosti, vzorec pro  $n$ -tý člen, posloupnost zadaná výčtem členů, posloupnost zadána graficky), aritmetická posloupnost (diference, rekurentní vzorec, vzorec pro  $n$ -tý člen, vzorec pro součet prvních  $n$  členů), geometrická posloupnost (kvocient, rekurentní vzorec, vzorec pro  $n$ -tý člen, vzorec pro součet prvních  $n$  členů), nekonečná geometrická řada, vzorec pro součet nekonečné geometrické řady.

### Posloupnosti reálných čísel:

1. Určete prvních šest členů posloupnosti  $(a_n)$  dané rekurentním vzorcem a počátečními podmínkami:

a)  $a_1 = 1, a_{n+1} = 5 - a_n$    b)  $a_1 = 8, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

c)  $a_1 = -1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$    d)  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n^2$

2. Napište prvních pět členů posloupnosti  $(a_n)$ , členy  $a_{n+1}, a_{2n}$ , je-li

a)  $a_n = n$    b)  $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$    c)  $a_n = (10n+1)^2$    d)  $a_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1})$

e)  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 1$    f)  $a_n = (-\sqrt{2})^n$    g)  $a_n = 2n - 3$    h)  $a_n = \frac{1}{n+1}$

i)  $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$    j)  $a_n = \frac{1}{n} \cdot 2^{n+1}$

3. Napište prvních 5 členů posloupnosti a znázorněte je graficky:

a)  $a_n = 2 - n$    b)  $a_n = 4 - n^2$    c)  $a_n = n \cdot (1 - n)$    d)  $a_n = (-1)^n \cdot (n + 1)$    e)  $a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$

4. Napište prvních 6 členů posloupnosti:

a)  $a_n = \frac{2n+1}{n}$    b)  $a_n = \frac{1-2n}{n+2}$    c)  $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$    d)  $a_n = (-1)^n [(n^2 - 1)/(n^2 + 1)]$

5. Vyjádřete vzorcem pro  $n$ -tý člen alespoň jednu z posloupností s následujícími prvními čtyřmi členy:

a) 2, 4, 6, 8, ...   b)  $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 4 \cdot 5, \dots$    c) 1, 3, 5, 7, ...   d) 1, -1, 1, -1, ...

e) 5, 7, 9, 11, ...   f)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

6. Napište prvních 6 členů posloupnosti dané rekurentně:

a)  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ ,  $a_1 = 1, a_2 = 2$    b)  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ,  $a_1 = 0, a_2 = 1$

c)  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$ ,  $a_1 = 4, a_2 = 2$    d)  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}$

7. \* Určete  $n$ -tý člen posloupnosti:

a)  $a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n$    b)  $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - a_n$

8. Znázorněte graficky první čtyři členy posloupnosti  $(b_n)$ , určete její šestý, jedenáctý a  $(k+2)$ . člen:

a)  $(n + (-1)^{n+2})_{n=1}^{\infty}$    b)  $b_n = 3 + n$    c)  $(-n^3)_{n=1}^{\infty}$

d)  $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$    e)  $(2n^2 - 5n + 1)_{n=1}^6$    f)  $b_n = \frac{n+4}{2n-1}$    g)  $b_n = 2^{n-1}$

9. U dané posloupnosti určete uvedené neznámé členy,  $k \in \mathbf{N}$ :
- a)  $a_n = 3n - 2$ ,  $a_5$ ,  $a_{10}$    b)  $c_n = \frac{n}{n-1}$ ,  $c_{20}$ ,  $c_{k+3}$    c)  $a_n = (-1)^{n+1} + 2n$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{13}$    d)  $b_n = \frac{3n-1}{2n+1}$ ,  $b_8$ ,  $b_{k+1}$
- e)  $b_n = (n^2 + 1)$ ,  $b_{100}$ ,  $b_k$    f)  $d_n = (-2n(n+1))$ ,  $d_{15}$ ,  $d_{3k}$    g)  $f_n = (6 - n^2)$ ,  $f_4$ ,  $f_{k+1}$
10. Vypočtěte kolikátý člen posloupnosti určené uvedeným vztahem má danou hodnotu:
- a)  $a_n = 5n - 1$ ,   19   b)  $b_n = 7 - 3n$ ,   -41   c)  $c_n = \frac{1}{2}n^2 + n$ ,   60
- d)  $d_n = -4n^2 + 21$ ,   -4   e)  $e_n = \frac{1}{5} \cdot (n^2 - 7n)$ ,   0   f)  $f_n = (3^{n-1} + 5)$ ,   14
11. Určete, od kterého členu počínaje splňuje daná posloupnost  $(a_n)$  uvedenou nerovnici:
- a)  $a_n = 4n - 5$ ,  $a_n \geq 8$    b)  $a_n = \frac{2-3n}{n}$ ,  $a_n \geq -2$    c)  $a_n = 2^{n-5}$ ,  $a_n > 4$
- d)  $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} - \frac{1}{2}$ ,  $a_n \leq \frac{1}{4}$    e)  $a_n = 25n^2$ ,  $a_n \leq 36$    f)  $a_n = 3n^2 - 5n$ ,  $a_n > 2$
12. Určete vzorec pro n-tý člen alespoň jedné z posloupností, začínající členy:
- a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...   b)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$    c) 1, 8, 27, 64, 125, ...   d) -1, -2, -3, -4, -5, ...
- e) -6, -6, -6, -6, ...   f) 1, 0, -1, -2, -3, -4, ...   g) -4, -8, -12, -16, -20, ...   h) -3, 3, -3, 3, -3, ...
- i) 2, 5, 8, 11, 14, ...   j)  $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$    k)\*  $x, 2x, 3x, 4x, 5x, \dots$    l)\*  $a, a^2, a^3, a^4, \dots$
13. Vypočtěte prvních pět členů posloupnosti dané rekurentně:
- a)  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n - 1$    b)  $a_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_{n+1} = -a_n$    c)  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
- d)  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 5a_n - 3$    e)  $a_1 = 44$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2n$    f)  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 16$ ,  $a_{n+2} = 0,5a_{n+1} - a_n$
- g)  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_n - 2a_{n+1} - 1$    h)  $a_1 = 0,5$ ,  $a_2 = \frac{2}{3}$ ,  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - n$
14. Určete rekurentní vzorec posloupnosti, která je dána vzorcem pro n-tý člen:
- a)  $a_n = 2n^3 - 3$    b)  $a_n = 3(n+1) - 4$    c)  $a_n = 22(n-5) + 7$    d)  $a_n = 25n$
- e)  $a_n = 2^{n-5}$    f)  $a_n = (1 + (-1)^n)$    g)  $a_n = 1 - 2n$
15. Posloupnost je dána vztahem  $a_{n+2} = 6a_{n+1} - n \cdot a_n$ , přičemž hodnoty členů  $a_1$ ,  $a_2$ , (hodnoty počátečních podmínek) udávají kořeny rovnice  $x^2 + 7x + 10 = 0$ . Určete  $a_3$ ,  $a_4$ , za předpokladu, že  $a_1 > a_2$ .
16. Zjistěte, která z čísel 289, 361, 1000, 223 jsou členy posloupnosti  $(n^2 + 2n + 1)_{n=1}^{\infty}$ .
17. Následující posloupnosti jsou zadány rekurentně. Vyjádřete je vzorcem pro n-tý člen:
- a)  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1} = 2 - a_n$ ,   b)  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2$    c)  $a_1 = 0,5$ ,  $a_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot a_n$
18. Napište všechny členy posloupnosti  $b_n = \frac{n}{n+1}$ , které leží mezi členy  $b_{21}$  a  $b_{25}$ .
19. Rozhodněte, zda posloupnost  $(b_n)$  je rostoucí nebo klesající:
- a)  $b_n = \frac{5n-1}{n+2}$    b)  $b_n = \frac{n+6}{n}$    c)  $b_n = \frac{-8}{5n}$    d)  $b_n = \frac{2n}{n+3}$
- e)  $b_n = \frac{n+1}{3n}$    f)  $b_n = \frac{n+4}{5+n}$    g)  $b_n = \frac{3n-2}{n+5}$    h)  $b_n = 1$
20. Určete, pro která  $x$  je posloupnost  $a_n = \frac{3nx}{n+5}$  klesající ?

21. Určete, pro která  $x$  je posloupnost  $b_n = \frac{nx}{2n-1}$  rostoucí ?

### Výsledky:

**1.** a) 1, 4, 1, 4, 1, 4; b) 8, 4, 2, 1, 0, 5; 0, 25; c)  $-1, 1, 5, 7, -1, -23$ ; d) 2, 1,  $-3, 8, 55, 2961$ ; **2.** a) 1, 2, 3, 4, 5;  $a_{n+1} = n + 1, a_{2n} = 2n$ ; b)  $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}$ ;  $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+3}, a_{2n} = \frac{4n-1}{4n+1}$  c) 121, 441, 961, 1681, 2601;  $a_{n+1} = (10n+11)^2, a_{2n} = (20n+1)^2$ ; d) 1, 0, 1, 0, 1;  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1+(-1)^n), a_{2n} = \frac{1}{2}(1+(-1)^{2n+1})$ ; e) 4, 7, 13, 25, 49;  $a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 1, a_{2n} = 3 \cdot 2^{2n-1} + 1$ ; f)  $-\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4, -4\sqrt{2}$ ;  $a_{n+1} = -\sqrt{2}^{n+1}, a_{2n} = (-\sqrt{2})^{2n} = 2^n$ ; g)  $-1, 1, 3, 5, 7, a_{n+1} = 2n - 1, a_{2n} = 4n - 3$ ; h)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, a_{n+1} = \frac{1}{n+2}, a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$  i)  $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, a_{n+1} = 3^{1-n}, a_{2n} = 3^{2-2n}$  j)  $4, 4, \frac{16}{3}, 8, \frac{64}{5}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+2}, a_{2n} = \frac{1}{2n}(2^{2n+1})$  **3.** a) 1, 0,  $-1, -2, -3$ , b) 3, 0,  $-5, -12, -21$ , c) 0,  $-2, -6, -12, -20$ , d)  $-2, 3, -4, 5, -6$ , e) 0, 1, 0, 1, 0 **4.** a)  $3, 2.5, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$ ; b)  $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, -1, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{7}, -\frac{11}{8}$ ; c)  $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}, -\frac{5}{26}, \frac{6}{37}$  d) 0,  $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{15}{17}, -\frac{12}{13}, \frac{35}{37}$  **5.** a)  $(2n)$  b)  $(n \cdot (n+1))$  c)  $(2n-1)$  d)  $(-1)^{n+1}$  e)  $(2n+3)$  f)  $(\frac{n}{n+1})$  **6.** a) 1, 2, 1,  $-1, -2, -1$  b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, c) 4, 2,  $-8, -22, -20, 26$ , d) 0.5, 0.25, 0.5, 2, 4, 2, **7.\*** a)  $a_n = (-1)^{n+1}$ , b)  $a_n = 0, 5 + (-1)^{n+1} \cdot 1, 5$  **8.** a)  $a_6 = 7, a_{11} = 10, a_{k+2} = k + 2 + (-1)^{k+4}$  b)  $a_6 = 9, a_{11} = 14, a_{k+2} = k + 5$ , c)  $a_6 = -216, a_{11} = -1331, a_{k+2} = -(k+2)^3$ , d)  $a_6 = -\frac{1}{32}, a_{11} = \frac{1}{1024}, a_{k+2} = (-2)^{-k-1}$ , e)  $a_6 = 43, a_{11}$  takový člen v posloupnosti není, protože zadaná posloupnost má pouze 6 členů,  $a_{k+2} = 2k^2 + 3k - 1$ , f)  $a_6 = \frac{10}{11}, a_{11} = \frac{5}{7}, a_{k+2} = \frac{k+6}{2k+3}$  g)  $a_6 = 2^5, a_{11} = 2^{10}, a_{k+2} = 2^{k+1}$  **9.** a)  $a_5 = 13, a_{10} = 28$ , b)  $c_{20} = \frac{20}{19}, c_{k+3} = \frac{k+3}{k+2}$ , c)  $a_{10} = 19, a_{13} = 27$ , d)  $b_8 = \frac{23}{17}, b_{k+1} = \frac{3k+2}{2k+3}$ , e)  $b_{100} = 10001, b_k = k^2 + 1$ , f)  $d_{15} = -480, d_{3k} = -18k^2 - 6k$ , g)  $f_4 = -10, f_{k+1} = 5 - 2k - k^2$  **10.** a) 4.člen, b) 16.člen, c) 10.člen d) takový člen neexistuje e) 7.člen f) 3.člen **11.** a) od 4.členu, b) platí pro první a druhý člen, c) od 8.členu d) od 4.členu e) pro první člen, f) od 3.členu **12.** a)  $(n)$  b)  $(1/n)$  c)  $(n^3)$  d)  $(-n)$  e)  $(-6)$  f)  $(2-n)$  g)  $(-4n)$  h)  $(3(-1)^n)$  i)  $(3n-1)$  j)  $((-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n})$  k)  $(nx)$  j)  $(a^n)$  **13.** a) 1, 0,  $-1, -2, -3$  b)  $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$  c) 2,  $-1, 1, 0, 1$ , d) 1, 2, 7, 32, 157, e) 44, 24, 16, 14, 15, f) 0, 16, 8,  $-12, -14$ , g)  $-2, 1, -5, 10, -26$ , h)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}$  **14.** a)  $a_{n+1} = a_n + 6n^2 + 6n + 2, a_1 = -1$  b)  $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 2$  c)  $a_{n+1} = a_n + 22, a_1 = -81$  d)  $a_{n+1} = a_n + 25, a_1 = 25$  e)  $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = \frac{1}{16}$  f)  $a_{n+1} = 2 - a_n, a_1 = 0$  g)  $a_{n+1} = a_n - 2, a_1 = -1$  **15.**  $a_3 = -28, a_4 = -158$ , **16.** ano, ano, ne, ne **17.** a)  $a_n = 1 + (-1)^n$  b)  $a_n = 2n$  c)  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$  **18.**  $\frac{22}{23}, \frac{23}{24}, \frac{24}{25}$ , **19.** a) rostoucí b) klesající c) rostoucí d) rostoucí e) klesající f) rostoucí g) rostoucí h) ani rostoucí ani klesající **20.**  $a_{n+1} - a_n = \frac{3x}{(n+2)(n+1)}, x < 0$  **21.**  $a_{n+1} - a_n = \frac{-x}{(2n+1)(2n-1)}, x < 0$

### ARITMETICKÁ POSLOUPNOST:

22. Určete, zda posloupnost s  $n$ -tým členem  $a_n$  je aritmetická, jestliže:

a)  $a_n = |n + 20|$  b)  $a_n = |n - 20|$  c)  $a_n = \frac{1}{n}$  d)  $a_n = \log 10^n$

23. Napište prvních deset členů aritmetické posloupnosti  $(a_n)$ , je-li:

a)  $a_1 = -1, d = 2$  b)  $a_1 = 3, d = -\frac{1}{2}$  c)  $a_1 = -2, d = 0,4$  d)  $a_1 = 0, d = -1$   
e)  $a_1 = \sqrt{5}, d = 0$  f)  $a_1 = \sqrt{5}, d = -1$

24. Určete  $n$ -tý člen aritmetické posloupnosti, je-li:

a)  $a_1 = 3, d = 4$  b)  $a_1 = -1, d = 0,4$  c)  $a_5 = 9, d = 7$  d)  $a_{10} = 20, d = -3$   
e)  $a_{100} = 1, d = 0,1$  f)  $a_{50} = 1 + \sqrt{2}, d = -1$

25. V aritmetické posloupnosti  $(a_n)$  určete  $a_1, d, a_n$ , je-li:

a)  $a_7 = 5, a_{12} = 15$  b)  $a_6 = -3, a_{15} = -8$  c)  $a_{10} = 1, a_{100} = 2$  d)  $a_{10} = 2, a_{100} = 1$   
e)  $a_1 + a_7 = 42$  f)  $a_3 + a_{10} = 21$

26. Zjistěte, zda čísla 77, 127 jsou členy aritmetické posloupnosti  $(a_n)$ , kde  $a_1 = -\frac{11}{7}, a_2 = 0$ .

27. Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti a znázorněte je graficky, je-li dáno:

a)  $a_1 = 3, d = -1$  b)  $a_1 = -3, d = 1$  c)  $a_1 = -3, 2, d = 2$  d)  $a_1 = 6, d = -2, 5$

28. Určete první čtyři členy aritmetické posloupnosti, je-li dáno:

a)  $a_4 = 7, 5, d = -\frac{1}{4}$  b)  $a_3 = -0, 2, a_4 = 0, 5$  c)  $a_5 = -\frac{5}{4}, d = \frac{1}{8}$  d)  $a_1 = -5, 5, a_3 = -6, 1$

- e)  $a_7 = -2, d = -4$  f)  $a_{10} = 5, d = -2$  g)  $a_{12} = 10, d = -2$  h)  $a_8 = -1, d = -3$
29. V aritmetické posloupnosti je dáno:
- a)  $a_1 = -\frac{1}{2}, d = 3$ , určete  $a_{12}, a_{100}$  b)  $a_1 = 2, d = -\frac{1}{4}$ , určete  $a_{17}, a_{25}$  c)  $a_1 = -5, d = -2$ , určete  $a_{20}, a_n$
- d)  $a_1 = 3, d = -\frac{1}{6}$ , určete  $a_{25}, a_n$  e)  $a_{18} = 4, d = -\frac{1}{5}$ , určete  $a_{33}, a_8$  f)  $a_{22} = -\frac{2}{3}, d = 1$ , určete  $a_{40}, a_{15}$
- g)  $a_{21} = 2, d = -\frac{1}{8}$ , určete  $a_{37}, a_{13}$  h)  $a_{19} = -\frac{1}{4}, d = 2$ , určete  $a_{28}, a_n$
30. V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, je-li dáno:
- a)  $a_{14} = 3, a_{23} = 21$  b)  $a_7 = 21, a_{13} = 15$  c)  $a_{11} = 9, a_{19} = 33$  d)  $a_9 = 6, a_{16} = -8$
31. V aritmetické posloupnosti je třináctý člen roven 23, šestnáctý člen 31. Určete její desátý člen a zapište posloupnost vzorcem pro  $n$ -tý člen.
32. Vložte mezi čísla 15 a 27 pět čísel tak, aby vznikla aritmetická posloupnost.
33. V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, je-li:
- a)  $a_1 + a_3 = 10$   $a_5 - a_2 = 9$  b)  $a_2 + a_7 = 25$   $a_{10} + a_{12} = 64$
34. Určete součet prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti:
- a)  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$  b)  $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$  c)  $1, 3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots$
35. Určete součet všech přirozených čísel dělitelných třemi a menších než tisíc.
36. Turista ujde první den 40 km a každý další den o 3 km méně než den předcházející. Určete, kolik kilometrů ujde za týden.
37. Určete diferenci aritmetické posloupnosti  $(a_n)$ , je-li dáno:
- a)  $a_1 = 2, a_{10} = 245$  b)  $a_1 = 5, a_n = 23, s_n = 392$  c)  $a_1 = \frac{11}{5}, s_{16} = 48$
38. Určete součet  $a_n$  prvních  $n$  členů
- a) posloupnosti  $a_n = 2n - 3$  b)\* posloupnosti  $a_n = a + nb$
39. Určete součet  $s_n$  prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti  $(a_n)$ , je-li dáno:
- a)  $a_1 = 0, a_{11} = 5$  b)  $a_1 = 14, d = -3, a_n = -1$
40. Určete součet:
- a)  $(8^2 + 1) + (8^2 + 2) + (8^2 + 3) + (8^2 + 4) + \dots + 9^2$
- b)\*  $(k^2 + 1) + (k^2 + 2) + (k^2 + 3) + (k^2 + 4) + \dots + (k + 1)^2$
41. V aritmetické posloupnosti je dáno:
- a)  $a_1 = 6, a_{15} = 27$ , určete  $s_{25}$  b)  $a_1 = 4, a_{21} = 14$ , určete  $s_{35}$  c)  $a_1 = 2, a_{16} = 12$ , určete  $s_{70}$
- d)  $a_1 = -3, a_{40} = 36$ , určete  $s_n$  e)  $a_8 = 10, a_{21} = 23$ , určete  $s_{100}$  f)  $a_9 = 18, a_{21} = 42$ , určete  $s_{200}$
- g)  $a_4 = 7, a_{12} = 42$ , určete  $a_{50}$  h)  $a_{10} = -65, a_{20} = -135$ , určete  $s_n$
42. Kolik prvních členů aritmetické posloupnosti dává součet 250, je-li  $a_3 = 5, d = 1$ ?
43. Určete pět prvních členů aritmetické posloupnosti, ve které platí:  $a_3 + a_{12} + 8 = 0, a_8 + a_1 - a_4 = 1$

44. Určete, kolik prvních členů aritmetické posloupnosti dává součet:  
 a) 130, je-li  $a_1 = 4$ ,  $d = 2$    b) 132, je-li  $a_4 = 15$ ,  $d = 3$   
 c) 87, je-li  $a_5 = 22$ ,  $a_6 = 27$    d) 180, je-li  $a_2 = -8$ ,  $a_4 = -4$
45. Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti, ve které platí:  
 a)  $a_5 - a_{11} + a_1 = 11$ ,  $a_2 + a_7 = 3$    b)  $a_{13} - a_2 + a_1 = 8$ ,  $a_4 = 5 - a_9$   
 c)  $a_5 + a_8 = 12$ ,  $a_{11} + a_1 - a_3 = 11$    d)  $a_1 - 2a_6 + 18 = 0$ ,  $a_{10} : a_3 = 8$
46. V aritmetické posloupnosti určete součet prvních  
 a) osmi členů, jestliže platí:  $a_{14} : a_4 = 16$ ,  $2a_2 - a_1 + 1 = 0$   
 b) deseti členů, jestliže platí:  $a_1 - 2a_6 + 30 = 0$ ,  $a_8 = 3a_5$
47. Určete součet prvních 200 přirozených čísel.
48. Určete součet všech lichých přirozených čísel menších než 100.
49. Určete součet všech sudých přirozených čísel menších než 150.
50. Určete součet všech přirozených dvojciferných čísel.
51. Určete součet všech přirozených trojciferných čísel.
52. Určete součet všech dvojciferných sudých přirozených čísel.
53. Určete součet všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných pěti.
54. Posloupnost je dána vztahem  $a_n = 2n + 3$ . Určete rozdíly:  
 a)  $a_2 - a_1$    b)  $a_8 - a_7$    c)  $a_{k+1} - a_k$    d)  $a_{k+4} - a_{k+3}$
55. V aritmetické posloupnosti je dáno:  
 a)  $a_1 = 2$ ,  $d = 3$ , určete součet všech členů posloupnosti od desátého po dvacátý člen včetně.  
 b)  $a_1 = 4$ ,  $d = 5$ , určete součet všech členů posloupnosti od osmého po dvaadvacátý člen včetně.
56. Určete součet všech přirozených dvojciferných čísel, která při dělení čtyřmi dávají zbytek 1.
57. Mezi čísla 7 a 51 vložte tolik čísel, aby vznikla aritmetická posloupnost. Součet daných a vložených čísel je 348. Určete vložená čísla.
58. Mezi kořeny rovnice  $3x^2 + 5(1 - x) = x(1 + 2x)$  vložte tolik členů, aby vznikla rostoucí aritmetická posloupnost se součtem 30. Určete počet vložených členů a diferenci.
59. Dělník vyrobí za směnu 45 součástek. Kolik součástek by vyrobil za 20 směn, kdyby svůj výkon postupně zvyšoval každou směnu o 2 součástky? (K řešení využijte poznatky o aritmetické posl.)
60. Kolik konzerv je třeba dát do spodní řady, chceme-li 182 konzerv uspořádat do třinácti řad nad sebou tak, aby v každé následující řadě bylo vždy o jednu konzervu méně? Kolik konzerv bude pak v horní řadě?
61. Užitím vzorce pro součet prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti určete součet všech přirozených čísel dělitelných třemi, která jsou větší než 100 a menší než 760.
62. \* V aritmetické posloupnosti je desátý člen  $a_{10} = 8$ , patnáctý člen  $a_{15} = 18$ . Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 100 a menší než 110?

63. \* Součin tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti se rovná jejich součtu. Určete tyto členy, víte-li, že difference  $d = \frac{13}{3}$

**Řešení:**

**22.** a) ano b) ne c) ne d) ano **23.** a)  $-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$  b)  $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$   
c)  $-2; -1, 6; -1, 2; -0, 8; -0, 4; 0; 0, 4; 0, 8; 1, 2; 1, 6$  d)  $0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$  e)  $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{5}$  f)  $\sqrt{5}, \sqrt{5}-1, \sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3, \sqrt{5}-4, \sqrt{5}-5, \sqrt{5}-6, \sqrt{5}-7, \sqrt{5}-8, \sqrt{5}-9$  **24.** a)  $a_n = 4n - 1$   
b)  $a_n = -1, 04 + 0, 4n$  c)  $a_n = 7n - 26$  d)  $a_n = 50 - 3n$  e)  $a_n = \frac{1}{10}n - 9$  f)  $a_n = 51 + \sqrt{2} - n$  **25.** a)  $a_1 = -7, d = 2, a_n = 2n - 9$  b)  $a_1 = -\frac{2}{9}, d = -\frac{5}{9}, a_n = \frac{1}{9}(3 - 5n)$  c)  $a_1 = \frac{9}{10}, d = \frac{1}{90}, a_n = \frac{1}{90}(n + 80)$   
d)  $a_1 = \frac{21}{10}, d = -\frac{1}{90}, a_n = \frac{1}{90}(190 - n)$  e)  $a_1 = \frac{168}{5}, d = -\frac{21}{5}, a_n = \frac{21}{5}(9 - n)$  **26.** 77 je členem, 127 není  
**27.** a)  $3, 2, 1, 0, -1$  b)  $-3, -2, -1, 0, 1$  c)  $-3, 2; -1, 2; 0, 8; 2, 8; 4, 8$  d)  $6; 3, 5; 1; -1, 5; -4$  **28.** a)  $\frac{33}{4}, 8, \frac{31}{4}, \frac{15}{2}$   
b)  $-1, 6; -0, 9; -0, 2; 0, 5$  c)  $-\frac{7}{4}, -\frac{13}{8}, -\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}$  d)  $-5, 5; -5, 8; -6, 1; -6, 4$  e)  $22, 18, 14, 10$  f)  $23, 21, 19, 17$   
c)  $32, 30, 28, 26$  d)  $20, 17, 14, 11$  **29.** a)  $a_{12} = 32, 5, a_{100} = 296, 5$  b)  $a_{17} = -2, a_{25} = -4$  c)  $a_{20} = -43, a_n = -3 - 2n$  d)  $a_{25} = -1, a_n = \frac{19}{6} - \frac{1}{6}n$  e)  $a_{33} = 1, a_8 = 6$  f)  $a_{40} = 17\frac{1}{3}, a_{15} = -7\frac{2}{3}$  g)  $a_{37} = 0, a_{13} = 3$  h)  $a_{28} = 17\frac{3}{4}, a_n = -38\frac{1}{4} + 2n$  **30.** a)  $a_1 = -23, d = 2$  b)  $a_1 = 27, d = -1$  c)  $a_1 = -21, d = 3$  d)  $a_1 = 22, d = -2$   
**31.**  $a_{10} = 15, a_n = \frac{8}{3}n - \frac{35}{3}$  **32.**  $17, 19, 21, 23, 25$  (Návod:  $a_1 = 15, a_7 = 25$ ) **33.** a)  $a_1 = 2, d = 3$  b)  $a_1 = 2, d = 3$  **34.** a)  $s_n = \frac{n}{2}(n + 1)$  b)  $s_n = n(n + 1)$  c)  $n^2$  **35.** Jde o konečnou posloupnost  $3, 6, 9, 12, \dots, 999$ , součet je  $166833$  **36.**  $217 \text{ km}$  **37.** a)  $5$  b)  $\frac{2}{3}$  c)  $\frac{8}{75}$  **38.** a)  $a_n = n(n - 2)$  b)  $s_n = \frac{n}{2}[2a + (n + 1)b]$  **39.** a)  $s_n = \frac{n}{4}(n - 1)$   
b)  $s_n = s_6 = 39$  **40.** a)  $\frac{17}{2}(65 + 81) = 1241$  b)  $(2k + 1)(k^2 + k + 1)$  **41.** a)  $s_{25} = 600$  b)  $s_{35} = 437, 5$  c)  $s_{70} = 1750$  d)  $s_n = \frac{n^2 - 7n}{2}$  e)  $a_{100} = 5250$  f)  $s_{200} = 40200$  g)  $s_{50} = 5053, 125$  h)  $s_n = \frac{3n - 7n^2}{2}$  **42.** prvních 20 členů **43.**  $9, 7, 5, 3, 1$  **44.** a)  $10$  b)  $8$  c)  $6$  d)  $20$  **45.** a)  $5, 4, 3, 2, 1$  b)  $-3, -2, -1, 0, 1$  c)  $-5, -3, -1, 1, 3$  d)  $-2, 0, 2, 4, 6$  **46.** a)  $s_8 = 28$  b)  $s_{10} = 80$  **47.**  $20100$  **48.**  $2500$  **49.**  $5550$  **50.**  $4905$  **51.**  $494550$  **52.**  $2430$  **53.**  $945$   
**54.** a)  $7 - 5 = 2$  b)  $19 - 17 = 2$  c)  $2k + 5 - (2k + 3) = 2$  d)  $2k + 11 - (2k + 9) = 2$ , neboť posloupnost je aritmetická s diferencí 2 **55.** a) Návod: určete  $s_{20} - s_9, 484$  b) návod: určete  $s_{22} - s_7, 1110$  **56.** Návod: Čísla při dělení čtyřmi se zbytkem 1 mají tvar  $4k + 1$ . Tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 4. První člen je 13, poslední 97,  $s_{22} = 1210$  **57.**  $a_1 = 7, d = 4$ , vložená čísla:  $11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47$ . **58.**  $a_1 = 1, a_n = 5, n = 10$ , počet vložených členů je 8,  $d = \frac{4}{9}$  **59.**  $a_{20} = 1280$  **60.**  $a_1 = 20, d = -1, a_{13} = 8$ . **61.**  $d = 3, s = 94710$  **62.\***  $a_1 = -10, d = 2, 17$  členů **63.\***  $-\frac{13}{3}, 0, \frac{13}{3}$  nebo  $\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, 9$  nebo  $-9, -\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}$

## GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

64. Napište prvních deset členů geometrické posloupnosti  $(a_n)$ , je-li:  
a)  $a_1 = -2, q = 1$  b)  $a_1 = 2, q = -1$  c)  $a_1 = -1, q = -\frac{1}{2}$   
d)  $a_1 = 1, q = \frac{1}{10}$  e)  $a_1 = 10^{-3}, q = 10$  f)  $a_1 = 3^4, q = -\frac{1}{3}$
65. Určete, zda posloupnost s  $n$ -tým členem  $a_n$  je geometrická, platí-li:  
a)  $a_n = 3 \cdot 2^n$  b)  $a_n = -2^{-n}$  c)  $a_n = 3^n \cdot 2^{2-n}$  d)  $a_n = 3 - 2^n$
66. Určete  $n$ -tý člen geometrické posloupnosti  $(a_n)$ , je-li:  
a)  $a_1 = 3, q = -\frac{4}{3}$  b)  $a_1 = -2, q = 2$  c)  $a_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{2}$  d)  $a_1 = \sqrt{3} + 1, q = \sqrt{3} - 1$
67. V geometrické posloupnosti  $(a_n)$  určete  $a_1, q, a_n$ , platí-li:  
a)  $a_2 = -1, a_5 = \frac{1}{64}$  b)  $a_4 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{1}{9}$  c)  $a_3 = 3, a_4 = \sqrt{3}$  d)  $a_4 = \frac{1}{100}, a_5 = 1$
68. Určete první čtyři členy geometrické posloupnosti a znázorněte je graficky:  
a)  $a_1 = 1, q = -2$  b)  $a_1 = -9, q = \frac{1}{3}$  c)  $a_1 = -2, q = -1$  d)  $a_1 = 8, q = -0, 5$
69. Určete prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:  
a)  $a_1 = 0, 1, a_2 = -0, 3$  b)  $a_2 = -12, a_3 = -6$  c)  $a_4 = -16, a_5 = 32$  d)  $a_3 = -1, a_4 = 0, 1$
70. V geometrické posloupnosti je dáno:  
a)  $a_5 = 0, 27, q = -\frac{1}{3}$ , určete  $a_8$  b)  $a_{10} = \frac{1}{16}, q = -2$ , určete  $a_{15}$  c)  $a_{12} = 8, 1, q = \frac{1}{3}$ , určete  $a_{16}$  d)  $a_7 = \frac{1}{25}, q = -5$ , určete  $a_{11}$
71. V geometrické posloupnosti je dáno:  $a_3 = 18, a_5 = 162$ . Určete součet prvních osmi členů.
72. V geometrické posloupnosti platí:  $a_2 - a_4 = 60, a_1 - a_3 = 15$ . Určete  $a_1, q$ .

73. V geometrické posloupnosti je dáno:

a)  $a_1 = -1$ ,  $q = 2$ , určete  $a_{10}$ ,  $s_5$     b)  $a_1 = 9$ ,  $q = 0,1$  určete  $a_8$ ,  $s_n$

c)  $a_4 = 6$ ,  $q = \frac{1}{4}$  určete  $a_n$ ,  $s_4$     d)  $a_1 = 1$ ,  $q = -\frac{1}{2}$  určete  $a_{11}$ ,  $s_{10}$

74. Určete kvocient geometrické posloupnosti, je-li dáno:

a)  $a_{21} = 4$ ,  $a_{16} = \frac{1}{8}$     b)  $a_5 = -162$ ,  $a_7 = -1458$     c)  $a_{27} = \frac{1}{128}$ ,  $a_{22} = \frac{1}{4}$

75. V geometrické posloupnosti je dáno:

a)  $q = -2$ ,  $s_6 = -21$ , určete  $a_6$     b)  $q = -3$ ,  $s_4 = -80$ , určete  $a_4$     c)  $q = \frac{1}{2}$ ,  $s_6 = 63$ , určete  $a_5$ .

76. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

a)  $a_3 - a_1 + 16 = 0$ ,  $a_4 - a_2 + 48 = 0$     b)  $a_5 = 40 - a_3$ ,  $a_1 + a_3 = 10$

77. Určete  $n$ , je-li v geometrické posloupnosti dáno:

a)  $a_n = 0,003$ ,  $a_1 = 3$ ,  $q = 0,1$     b)  $a_n = 162$ ,  $a_1 = 2$ ,  $q = 3$     c)  $a_n = 3125$ ,  $a_1 = 32$ ,  $q = 2,5$

78. Mezi čísla  $\frac{2}{3}$  a  $162$  vložte čtyři čísla tak, aby s danými tvořila geometrickou posloupnost.

79. Mezi čísla  $\frac{3}{2}$  a  $\frac{8}{27}$  vložte tři čísla tak, aby s danými tvořila geometrickou posloupnost.

80. Mezi kořeny rovnice  $2x^2 - 33x + 16 = 0$  vložte čtyři čísla tak, aby s kořeny rovnice tvořila rostoucí geometrickou posloupnost.

81. Odečteme-li postupně totéž číslo od čísel 29, 11, 5, dostaneme první tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete toto číslo a pak v takto vzniklé geometrické posloupnosti určete první člen a kvocient.

82. Čtyři celá čísla tvoří za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti. Poslední číslo je devětkrát větší než číslo druhé. Určete tato čtyři čísla, víte-li, že jejich součet je 360.

83. Mezi čísla 5 a 1280 vložte tolik čísel, aby vznikla konečná geometrická posloupnost se součtem vložených členů 2555.

84. Čtyři racionální čísla mají tu vlastnost, že první tři tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, poslední tři tvoří po sobě jdoucí členy posloupnosti geometrické. Součet krajních čísel je 37 a součet prostředních 36. Jaká jsou to čísla?

85. Kvádr, jehož délky hran tvoří geometrickou posloupnost, má povrch  $78\text{cm}^2$  a součet délek hran procházejících jedním vrcholem je 13 cm. Určete objem kvádru.

86. Vypočítejte součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti, ve které je:

a)  $a_1 = 8$ ,  $q = 0,5$     b)  $a_1 = 3$ ,  $q = -2$     c)  $a_1 = 6$ ,  $q = \frac{1}{2}$     d)  $a_1 = -1$ ,  $q = -10$

87. \* Existují taková tři čísla, která jsou současně prvními třemi členy aritmetické i geometrické posloupnosti?

88. \* Mohou velikosti pravoúhlého trojúhelníka tvořit tři po sobě následující členy

a) aritmetické posloupnosti    b) geometrické posloupnosti ?

89. Víme, že velikosti vnitřních úhlů určitého trojúhelníku tvoří tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti. Dokažte, že velikost jednoho z úhlů je  $60^\circ$

90. Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 jisté číslo  $x$ , dostaneme tři po sobě následující členy určité geometrické posloupnosti. Určete toto neznámé číslo.

91. Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby vznikla geometrická posloupnost se součtem vložených členů 630.

92. Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla tak, aby první tři tvořila geometrickou posloupnost a poslední tři posloupnost aritmetickou.

93. Přičteme-li k číslům  $x, y, z$  stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti  $a_4$ , je-li:
- a)  $x = 2, y = 16, z = 58$  b)  $x = -6, y = 15, z = 99$
94. Dokažte, že posloupnost  $(\frac{2n-1}{3})$  je aritmetická posloupnost.
95. Dokažte, že posloupnost  $(\frac{n}{n+1})$  není ani aritmetická, ani geometrická.
96. V geometrické posloupnosti je  $a_1 = \frac{1}{16}, q = 2$ .
- a) Pro který člen platí, že  $a_n + a_{n+3} = 2304$ ? b) Pro který člen platí, že  $a_n + a_{n+3} = 23040$ ?
97. Napište první čtyři členy geometrické posloupnosti, ve které je  $a_1 = \frac{x}{2}, a_2 = 2x^3 (x \neq 0)$ .
98. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, v níž platí:
- a)  $a_1 + a_4 = 195, a_2 + a_3 = 60$  b)  $a_1 - a_2 + a_3 = 9, a_4 - a_5 + a_6 = 72$
- c)  $a_1 + a_2 = 4, a_2 - a_4 = -24$  d)  $a_1 - a_2 + a_3 = \frac{28}{9}, a_1 + a_4 = \frac{70}{9}$
99. V geometrické posloupnosti je  $a_1 = 6, q = 3$ . Určete nejmenší přirozené  $n$  tak, aby  $s_n > 726$ .
100. V geometrické posloupnosti je  $a_1 = 7, q = 5$ . Stanovte podmínku pro  $n$ , aby  $s_n \leq 217$ .
101. V geometrické posloupnosti je dáno:
- a)  $a_3 = 18, a_6 = 486$  určete  $a_7, s_7$  b)  $a_4 = 54, a_7 = 1458$  určete  $a_{10}, s_{12}$
- c)  $a_3 = 18, a_6 = 486, a_n = 1458$  určete  $n$  d)  $a_5 = 16, a_8 = 128$  určete  $a_7, s_7$
102. Součet prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti je 6141, první člen je 3 a poslední člen je 3072. Vypočítejte počet členů a kvocient této posloupnosti.
103. Geometrická posloupnost má součet členů 16400, poslední člen je 10935 a kvocient 3. Určete první člen a počet členů posloupnosti.
104. Dokažte, že je posloupnost geometrická: a)  $(2^n)$  b)  $(2^{-n})$  c)  $(3^{n-1} \cdot 2^{2-n})$

### Řešení:

**63.** a)  $-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2$  b)  $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2$

c)  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, -\frac{1}{256}, \frac{1}{512}$  d)  $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^6}, \frac{1}{10^7}, \frac{1}{10^8}, \frac{1}{10^9}$  e)  $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  f)  $3^4, -3^3, 3^2, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, -\frac{1}{3^5}$  **64.** a) ano b) ano

c) ano d) ne **65.** a)  $a_n = (-4)^{n-1} \cdot 3^{2-n}$  b)  $a_n = -2^n$  c)  $a_n = \sqrt{2}^n$  d)  $a_n = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)^n$  **66.** a)  $a_1 = 4, q = -\frac{1}{4}, a_n = (-1)^{n-1} \cdot 4^{2-n}$  b)  $a_1 = 9, q = \frac{1}{3}, a_n = 3^{3-n}$  c)  $a_1 = 9, q = \frac{\sqrt{3}}{3}, a_n = (\sqrt{3})^{5-n}$  d)  $a_1 = 10^{-8}, q = 100, a_n = 10^{2n-10}$  **67.** a)  $1, -2, 4, -8$  b)  $-9, -3, -1, -\frac{1}{3}$  c)  $-2, 2, -2, 2$  d)  $8, -4, 2, -1$  **68.** a)  $0, 1; -0, 3; 0, 9; -2, 7; 8, 1$  b)  $-24; -12; -6; -3; -\frac{3}{2}$  c)  $2; -4; 8; -16, 32$  d)  $-100; 10; -1; \frac{1}{10}, -\frac{1}{100}$  **69.** a)  $a_8 = -0,01$  b)  $a_{15} = -2$  c)  $a_{16} = 0,1$  d)  $a_{11} = 25$  **70.**  $s_8 = 6560$  pro  $q = 3$  nebo  $s_8 = -3280$  pro  $q = -3$

**71.**  $a_1 = -1, q = 4$  **72.** a)  $a_{10} = -512, s_5 = -31$  b)  $a_8 = 9 \cdot 10^{-7}, s_n = 10(1 - 10^{-n})$  c)  $a_n = 1536 \cdot 4^{-n}, s_4 = 510$  d)  $a_{11} = \frac{1}{1024}, s_{10} = \frac{341}{512}$  **73.** a)  $q = 2$  b)  $q = 3$  nebo  $q = -3$  c)  $q = \frac{1}{2}$  **74.** a)  $a_6 = -32$  b)  $a_4 = 108$  c)  $a_5 = 2$  **75.** a)  $a_1 = -2, q = 3$  b)  $a_1 = 2, q = 2$  nebo  $a_1 = 2, q = -2$  **76.** a)  $n = 4$  b)  $n = 5$  c)  $n = 6$  **77.**  $2, 6, 18, 54$  **78.**  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ , nebo  $-1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9}$  **79.**  $1, 2, 4, 8$  **80.**  $x = 2, a_1 = 27, q = \frac{1}{3}$  **81.**  $-18, 54, -162, 486$  pro  $q = -3, a_1 = -18$  nebo  $9, 27, 81, 243$  pro  $q = 3, a_1 = 9$  **82.**  $10, 20, 40, 80, 160, 320, 640$   $a_1 = 5, q = 2$  **83.**  $12, 16, 20, 25$  nebo  $\frac{99}{4}, \frac{81}{4}, \frac{63}{4}, \frac{49}{4}$  **84.**  $27 \text{ cm}^3$  **85.** a)  $15, 5$  b)  $-31$  c)  $11, 625$  d)  $-9091$  **86.\*** ano, např.  $1, 1, 1$  **87.\*** a) ano, např.  $6, 8, 10$  b) ano **89.** číslo 3 **90.**  $10, 20, 40, 80, 160, 320, q = 2, n = 8$  **91.**  $3, -\frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 18, q = -\frac{3}{2}, d = \frac{45}{4}$  nebo  $3, 6, 12, 18, q = 2, d = 6$  **92.** a) přičteme 5,  $a_1 = 7, q = 3, s_4 = 280$  b) přičteme  $\frac{275}{21}, a_1 = \frac{149}{21}, q = \frac{590}{149}, s_4 \cong 586, 96$  **95.** a)  $n = 13$  b) takový člen neexistuje **96.**  $\frac{x}{2}, 2x^3, 8x^5, 32x^7$  **97.** a)  $a_1 = 3, q = 4$  nebo  $a_1 = 192, q = 0,25$  b)  $a_1 = 3, q = 2$  c)  $a_1 = 1, q = 3$  nebo  $a_1 = -4, q = -2$  d)  $a_1 = \frac{16}{9}, q = 1,5$  **98.**  $n = 6$  **99.**  $n \leq 3$  **100.** a)  $a_7 = 1458, s_7 = 2186$  b)  $a_{10} = 39366, s_{12} = 531440$  c)  $n = 7$  d)  $a_7 = 64, s_7 = 127$  **101.**  $n = 11, q = 2$  **102.**  $a_1 = 5, n = 8$

## NEKONEČNÁ GEOMETRICKÁ ŘADA:

Nekonečná geometrická řada je výraz  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ , jehož členy tvoří geometrickou posloupnost. Nekonečnou geometrickou řadu lze stručně zapsat výrazem:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_i$ .

Pro součet geometrické řady platí: je-li  $|q| < 1$ ,  $a_1 \neq 0 \Rightarrow s = \frac{a_1}{1-q}$ .

105. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$  b)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$   
c)  $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

106. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$  b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$  c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5 \cdot 7^{n-1}}$

107. Napište jako zlomek s celým čitatelem i jmenovatelem periodické číslo (využijte nekonečnou geometrickou řadu):

a)  $0, \bar{5}$  b)  $2, 91\bar{7}$  c)  $1, \bar{7}$  d)  $3, 5\bar{4}$  e)  $3, \bar{74}$  f)  $0, \bar{14}$  g)  $2, 1\bar{2}$

108. Rozhodněte, zda se jedná o geometrickou nekonečnou řadu a pokud ano, zda se dá najít její součet. Pokud ano, tak tento součet zjistěte:

a)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots$  b)  $2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + \dots$  c)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{9} + \dots$

109. Vypočítejte součet nekonečné geometrické řady:

a)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots$  b)  $(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 + \dots$   
c)  $1 - \frac{2}{7} + \frac{4}{49} - \frac{8}{343} + \dots$  d)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$

110. Je dán čtverec se stranou  $a$ . Spojnice středů jeho stran tvoří opět čtverec, spojnice středů stran nového čtverce potom opět čtverec atd. Vypočítejte součet obsahů a obvodů všech takto vzniklých čtverců.

111. Do čtverce je vepsána kružnice, do ní opět čtverec, potom opět kružnice atd. Vypočítejte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců. Velikost strany prvního čtverce je  $a$ .

### Řešení:

**104.** a)  $q = \frac{1}{2}$ ,  $s = 1$  b)  $q = -\frac{1}{3}$ ,  $s = \frac{3}{4}$  c)  $q = \frac{3}{4}$ ,  $s = 3$  **105.** a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} = 1 - \frac{3}{7} + \frac{9}{49} - \frac{27}{343} + \dots$

;  $q = -\frac{3}{7}$ ,  $s = \frac{7}{10}$  b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \dots$ ,  $q = \frac{1}{4}$ ,  $s = 4$  c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \dots$ ,  $q = \frac{1}{3}$ ,  $s = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5 \cdot 7^{n-1}} = \frac{3}{5} + \frac{9}{35} + \frac{27}{245} + \frac{81}{1715} + \dots$ ,  $q = \frac{3}{7}$ ,  $s = \frac{21}{20}$  **106.** každé číslo napíšeme pomocí nekonečné řady:

a)  $0, \bar{5} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$ ,  $q = \frac{1}{10}$ ,  $s = \frac{5}{9} = 0, \bar{5}$  b)  $2, 91\bar{7} = 2, 91 + (\text{nekonečná řada}) \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000} + \dots$ ;  $q = \frac{1}{10}$ ,  $s = \frac{7}{900}$ ,  $2, 91\bar{7} = \frac{291}{100} + \frac{7}{900} = \frac{1313}{450}$  c)  $\frac{16}{9}$  d)  $\frac{319}{90}$  e)  $3, \bar{74} = 3 + (\text{nekonečná řada}) \frac{74}{100} + \frac{74}{10000} + \frac{74}{1000000} + \dots$ ,  $q = \frac{1}{100}$ ,  $s = \frac{74}{99}$ ,  $3, \bar{74} = 3 + \frac{74}{99} = \frac{371}{99}$  e)  $\frac{14}{99}$  f)  $\frac{70}{33}$  **107.** a) geometrickou řadu s kvocientem  $q = -\frac{1}{2}$ ,  $s = \frac{1}{1}$  b) geometrická řada s kvocientem  $q = 1$ , řada nelze jednoznačně sečíst,

součet by mohl být buď 0 nebo 2 (zapřemýšlejte). c) geometrická řada s kvocientem  $q = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1)}{2}$  **108.** a) jedná se o součet dvou geometrických řad:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$  a  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

nalezneme součet každé řady a pak součty sečteme  $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  b)  $q = (\sqrt{5} - \sqrt{2})$ ,  $s = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{1}{2}$  c)  $s = \frac{7}{9}$  d) rozdělíme na součet dvou geometrických řad,  $s = \frac{7}{6}$  **109.** pro obsahy čtverců platí:  $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots = 2a^2$ ,  $q = \frac{1}{2}$  pro obvody platí:  $4a + \frac{4a}{\sqrt{2}} + \frac{4a}{2} + \dots = \frac{8a}{2-\sqrt{2}} = 4a(2 + \sqrt{2})$  **110.**

platí:  $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \dots = 2a^2$ ,  $q = \frac{1}{2}$