

OBEČNÁ ROVNICE ROVINY - PŘÍKLADY

1. Jsou dány přímky $p = \{[1 - t; 3 - 2t; 3t], t \in \mathbf{R}\}$ a $q : x = -t, y = 3, z = 2 + t, t \in \mathbf{R}$.
Najděte obecnou rovnici roviny ρ , která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q .

ŘEŠENÍ:

Pro určení obecné rovnice potřebujeme znát jeden **libovolný bod roviny** (přímka p leží v rovině, proto její všechny body jsou i body roviny, přímka je určena bodem $[1; 3; 0]$, to je i bod roviny ρ .), **dva libovolné lineárně nezávislé směrové vektory roviny** (Přímka p leží v rovině, proto její směrový vektor je i směrovým vektorem dané roviny. Přímka q je s rovinou rovnoběžná a s přímkou p mimoběžná (důkaz př.2), proto i směrový vektor této přímky je současně směrovým vektorem roviny ρ).

$$A[1; 3; 0]$$

$$\vec{u}_p = (-1; -2; 3)$$

$$\vec{u}_q = (-1; 0; 1)$$

$$\vec{n}_\rho = \vec{u}_p \times \vec{u}_q = (-2; -2; -2)$$

$$\rho : -2x - 2y - 2z + d = 0$$

$$A : -2 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\rho : -2x - 2y - 2z + 8 = 0$$

$$\rho : x + y + z - 4 = 0$$

2. Určete, zda existuje rovina, která obsahuje přímky p, q z předcházejícího příkladu. Pokud taková rovina existuje, pak určete její obecnou rovnici.

ŘEŠENÍ:

Pokud rovina obsahuje obě přímky p, q , musí být přímky buď rovnoběžné různé nebo různoběžné. Rovnoběžné totožné přímky neurčují jednu konkrétní rovinu, ale rovin procházejících těmito totožnými přímkami lze určit nekonečně mnoho. Jsou-li přímky mimoběžné, pak jimi nelze proložit žádnou rovinu, tedy tyto přímky nemohou ležet v jedné rovině. Řešení příkladu spočívá v určení vzájemné polohy přímek. Pokud jsou přímky **mimoběžné**, pak daná **rovina neexistuje**. Pokud jsou přímky **rovnoběžné různé**, pak leží v rovině, jejímž jedním směrovým vektorem je směrový vektor rovnoběžných přímek, druhý směrový vektor najdeme spojením dvou bodů, každý z jedné přímky. Tím získáme dva lineárně nezávislé vektory, ze kterých spočítáme normálový vektor a dopočítáme obecnou rovnici roviny. Pokud jsou přímky **různoběžné**, pak leží v rovině, jejíchž dva lineárně nezávislé směrové vektory jsou směrové vektory daných přímek, pomocí nich určíme normálový vektor a přes libovolný bod jedné z přímek dopočítáme obecnou rovnici. Pokud jsou přímky rovnoběžné totožné, je přímka v podstatě pouze jedna. Pak rovin existuje nekonečně mnoho a všechny roviny mají tuto přímku společnou, tedy všechny roviny mají jeden směrový vektor stejný.

Určíme vzájemnou polohu přímek p, q :

$$1 - t = -s$$

$$3 - 2t = 3$$

$$3t = 2 + s$$

Sečteme první a třetí rovnici: $1 + 2t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Dopočítáme s z první rovnice: $1 - \frac{1}{2} = -s \Rightarrow s = -\frac{1}{2}$

Zkontrolujeme druhou rovnici: $3 - 1 = 3$, což je nepravdivá rovnost, proto přímky jsou buď rovnoběžné různé nebo mimoběžné.

Rozhodneme dle směrových vektorů $\vec{u}_p = (-1; -2; 3)$, $\vec{u}_q = (-1; 0; 1)$. Vektory jsou lineárně nezávislé, proto přímky jsou mimoběžné a nemohou ležet v jedné rovině. Taková rovina tedy neexistuje.

3. Najděte obecnou rovnici roviny s parametrickým vyjádřením $\rho = \{[2 + t - s; 3 - 2t + s; -1 - t + 2s], t, s \in \mathbf{R}\}$.

Z parametrického vyjádření roviny určíme jeden bod roviny a směrové vektory roviny, z nichž pomocí vektorového součinu odvodíme normálový vektor.

$$\vec{u} = (1; -2; -1)$$

$$\vec{v} = (-1; 1; 2)$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3; -1; -1)$$

$$\rho : -3x - y - z + d = 0$$

$$A[2; 3; -1] : -6 - 3 + 1 + d = 0$$

$$d = 8$$

$$\rho : -3x - y - z + 8 = 0$$

$$\rho : 3x + y + z - 8 = 0$$

4. Najděte obecnou rovnici roviny σ , která prochází počátkem soustavy souřadnic a je rovnoběžná s rovinou $\rho : 2x - y + 3z - 4 = 0$.

ŘEŠENÍ:

Rovnoběžné roviny mají stejnou množinu normálových vektorů, tj. mají stejný normálový vektor.

$$\vec{n}_\rho = \vec{n}_\sigma = (2; -1; 3)$$

Rovina prochází počátkem tj. $O[0; 0; 0]$.

$$\sigma : 2x - y + 3z + d = 0$$

$$O : d = 0$$

$$\sigma : 2x - y + 3z = 0$$

5. Najděte podmínku, kterou musí splňovat obecná rovnice roviny, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ:

Roviny procházející počátkem soustavy souřadnic mají koeficient d v obecné rovnici roviny roven nule.

Důkaz:

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

$$O[0; 0; 0] : 0x + 0y + 0z + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

6. Rovina α má tyto vlastnosti: je rovnoběžná s osou z , je rovnoběžná s přímkou $p = \{[2 + 2t; 1 - t; 3], t \in \mathbf{R}\}$ a prochází bodem $A[2; 2; 5]$. Určete obecnou rovnici roviny α .

ŘEŠENÍ:

Směrové vektory přímek jsou zároveň směrovými vektory roviny, s kterou jsou přímky rovnoběžné. Pro určení obecné rovnice roviny závisí na tom, zda jsou směrové vektory daných přímek lineárně závislé či nezávislé. Jsou-li vektory **lineárně závislé** a přímky jsou rovnoběžné totožné (tedy je přímka pouze jedna), rovin procházejících daným bodem, rovnoběžných s přímkou je nekonečně mnoho. Jedna z rovin je např. ta, ve které zadaná přímka leží. Pak známe pouze jeden směrový vektor roviny a druhý určíme spojením libovolného bodu přímky a bodu, kterým má rovina procházet. Pokud jsou přímky rovnoběžné různé, pak určíme rovinu, která těmito přímkami prochází, výsledná rovina je pak s touto rovnoběžná a prochází zadaným bodem. Pokud jsou vektory **lineárně nezávislé**, pak tyto vektory jsou směrové vektory dané roviny. Pomocí nich určíme normálový vektor a odtud obecnou rovnici hledané roviny.

$$\vec{u}_\alpha = \vec{u}_p = (2; -1; 0)$$

$$\vec{v}_\alpha = \vec{u}_z = (0; 0; 1)$$

$$\text{Vektory jsou lineárně nezávislé. } \vec{n} = (2; -1; 0) \times (0; 0; 1) = (-1; -2; 0) \Rightarrow \vec{n} = (1; 2; 0)$$

$$\alpha : x + 2y + d = 0$$

$$A[2; 2; 5] : 2 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -6$$

$$\alpha : x + 2y - 6 = 0$$