

19. POSLOUPNOSTI

- pojem posloupnost, člen posloupnosti, konečná a nekonečná posloupnost, graf posloupnosti, rostoucí a klesající posloupnost, zápis posloupnosti (rekurentní vzorec posloupnosti, vzorec pro n-tý člen, posloupnost zadaná výčtem členů, posloupnost zadána graficky), aritmetická posloupnost (diference, rekurentní vzorec, vzorec pro n-tý člen, vzorec pro součet prvních n členů), geometrická posloupnost (kvocient, rekurentní vzorec, vzorec pro n-tý člen, vzorec pro součet prvních n členů), nekonečná geometrická řada, vzorec pro součet nekonečné geometrické řady.

Nekonečná geometrická řada:

Nekonečná geometrická řada je výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, jehož členy tvoří geometrickou posloupnost.

Nekonečnou geometrickou řadu lze stručně zapsat výrazem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_i$.

Pro součet geometrické řady platí: je-li $|q| < 1$, $a_1 \neq 0 \Rightarrow s = \frac{a_1}{1-q}$.

104. Určete součet nekonečné geometrické řady:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad \text{b) } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{c) } \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

105. Určete součet nekonečné geometrické řady:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5 \cdot 7^{n-1}}$$

106. Napište jako zlomek s celým čitatelem i jmenovatelem periodické číslo (využijte nekonečnou geometrickou řadu):

$$\text{a) } 0,\bar{5} \quad \text{b) } 2,91\bar{7} \quad \text{c) } 1,\bar{7} \quad \text{d) } 3,5\bar{4} \quad \text{e) } 3,\bar{74} \quad \text{f) } 0,1\bar{4} \quad \text{g) } 2,1\bar{2}$$

107. Rozhodněte, zda se jedná o geometrickou nekonečnou řadu a pokud ano, zda se dá najít její součet. Pokud ano, tak tento součet zjistěte:

$$\text{a) } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots \quad \text{b) } 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + \dots \quad \text{c) } 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{9} + \dots$$

108. Vypočítejte součet nekonečné geometrické řady:

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots \quad \text{b) } (\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 + \dots$$

$$\text{c) } 1 - \frac{2}{7} + \frac{4}{49} - \frac{8}{343} + \dots \quad \text{d) } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$$

109. Je dán čtverec se stranou a. Spojnice středů jeho stran tvoří opět čtverec, spojnice středů stran nového čtverce potom opět čtverec atd. Vypočítejte součet obsahů a obvodů všech vzniklých čtverců.

110. Do čtverce je vepsána kružnice, do ní opět čtverec, potom opět kružnice atd. Vypočítejte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců. Velikost strany prvního čtverce je a.

Řešení:

$$\text{104. a) } q = \frac{1}{2}, s = 1 \quad \text{b) } q = -\frac{1}{3}, s = \frac{3}{4} \quad \text{c) } q = \frac{3}{4}, s = 3 \quad \text{105. a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} = 1 - \frac{3}{7} + \frac{9}{49} - \frac{27}{343} + \dots; q = -\frac{3}{7}, s = \frac{7}{10}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \dots, q = \frac{1}{4}, s = 4 \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \dots, q = \frac{1}{3}, s = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5 \cdot 7^{n-1}} = \frac{3}{5} + \frac{9}{35} + \frac{27}{245} + \frac{81}{1715} + \dots, q = \frac{3}{7}, s = \frac{21}{20} \quad \text{106. každé číslo napíšeme pomocí nekonečné řady:}$$

a) $0,\bar{5} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$, $q = \frac{1}{10}$, $s = \frac{5}{9} = 0,\bar{5}$ b) $2,91\bar{7} = 2,91 + (\text{nekonečná řada}) \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000} + \dots$;

$q = \frac{1}{10}$, $s = \frac{7}{900}$, $2,91\bar{7} = \frac{291}{100} + \frac{7}{900} = \frac{1313}{450}$ c) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{319}{90}$ e) $3,\bar{74} = 3 + (\text{nekonečná řada}) \frac{74}{100} + \frac{74}{10000} + \frac{74}{1000000} + \dots$,

$q = \frac{1}{100}$, $s = \frac{74}{99}$, $3,\bar{74} = 3 + \frac{74}{99} = \frac{371}{99}$ e) $\frac{14}{99}$ f) $\frac{70}{33}$ **107.** a) nejedná se o geometrickou řadu b) geometrická řada

s kvocientem $q = 1$, řada nelze jednoznačně sečíst, součet by mohl být buď 0 nebo 2 (zapřemýšlej). c) geometrická řada

s kvocientem $q = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1)}{2}$ **108.** a) jedná se o součet dvou geometrických řad: $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ nalezneme součet každé řady a pak součty sečteme $\rightarrow s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ b) $q = (\sqrt{5} - \sqrt{2})$, $s = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{5} + \sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{1}{2}$ c) $s = \frac{7}{9}$ d) rozdělíme na součet dvou geometrických řad, $s = \frac{7}{6}$ **109.** pro obsahy čtverců platí:

$a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots = 2a^2$, $q = \frac{1}{2}$ pro obvody platí: $4a + \frac{4a}{\sqrt{2}} + \frac{4a}{2} + \dots = \frac{8a}{2 - \sqrt{2}} = 4a(2 + \sqrt{2})$

110. platí: $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \dots = 2a^2$, $q = \frac{1}{2}$