LIMITA POSLOUPNOSTI, NEKONEČNÁ ŘADA

- limita posloupnosti, konvergentní posloupnost, vlastní limita, divergentní posloupnost, nevlastní limita, výpočet limit posloupností, konvergence a divergence aritmetické a geometrické posloupnosti. Nekonečná geometrická řada, suma, součet nekonečné geometrické řady.

LIMITA POSLOUPNOSTI

1. Vypočítejte limity následujících posloupností:

   a) $\left(\frac{4}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $(5,4)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{3n}{4n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $((-4)^n)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(\frac{(-1)^n}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\frac{2n^2+4n-3}{n^2-2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ g) $\left(\frac{2n^2+4n-3}{n^3-2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

   h)* $\left(\frac{2n^3-4n+3}{n^2-2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ i)* $\left(\frac{n^2+4n}{n+4}\right)_{n=1}^{\infty}$ j)* $(\sqrt{n+1})_{n=1}^{\infty}$

2. Určete limity následujících posloupností:

   a) $(1+(-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ b) $(2-1^n)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(3-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\frac{2^n}{4^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(\frac{3^n}{2^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\frac{2^n}{3^{n-1}}\right)_{n=1}^{\infty}$

3. Vypočtěte limitu posloupnosti:

   a) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{n-2}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n-3}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{3n^2+2n-4}$ d) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)^2$ e) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)$

4. Vypočtěte limitu posloupnosti:
   a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^3}{(3n-2)(1-n^2)}$ b)* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{n}{3}\right)$ c)* $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

5. Vypočtěte limitu posloupnosti:
   a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+5}{n^3+1}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{3n^2-3}$ c)* $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{n^3+2n^2+3}$ d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$

NEKONEČNÁ GEOMETRICKÁ ŘADA

6. Danou nekonečnou řadu zapište pomocí symbolu sumy:
   a) $3-9+27-81+\cdots$ b) $1+2+4+8+16+32+\cdots$ c) $1+\frac{1}{5}a+\frac{1}{25}a^2+\cdots$

   d) $-a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}a-\cdots$ e) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}+2+2x+2x^2+2x^3+\cdots$

7. Rozepište danou geometrickou posloupnost, určete první člen a kvocient:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{-2n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}3(-1)^{n-1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}3(x-1)^n$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-2}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^n$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}^{-n})$

8. U daných geometrických řad určete první člen a kvocient. Rozhodněte, zda je řada konvergentní či divergentní. Pokud je řada konvergentní, pak určete její součet:
   a) $\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+\cdots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ c) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}+\frac{1}{54}-\cdots$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$ e) $3+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\cdots$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

9. Určete, pro které $x\in\mathbf{R}$ jsou konvergentní následující nekonečné řady, určete součet příslušné řady:
   a) $3+9x+27x^2+81x^3+\cdots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+4)^n$

   e) $x+1+(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+\cdots$ f) $-x-2x-4x-8x-\cdots$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1}$

10. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

a) $-2 + 4x - 8x^2 + \cdots = -1$ b) $3 + 9x + 27x^2 + \cdots = 30$

11. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(3-4x)^n = -\frac{1}{2x}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^{2n} = \frac{1}{6}$

12. Daný zlomek zapište pomocí nekonečné geometrické řady alespoň jedním způsobem: a) $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{2}{5}$

13. Řešte rovnici v $\mathbf{R}$:
a)* $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + \cdots = \frac{5}{3}$ b)* $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \cdots = 1$
c) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^2} + \cdots = \frac{4x-3}{3x-4}$ d) $3 - \frac{4}{x} + \frac{16}{x^2} - \frac{64}{x^3} + \cdots = \frac{2x+1}{x-1}$

ŘEŠENÍ: **1.a)** 0 **b)** $5,4$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** nemá limitu, řada je divergentní **d)** 0 **f)** 2 **g)** 0 **h)** ∞ **i)** ∞ **j)** ∞ **2.a)** posloupnost je divergentní, nemá limitu **b)** 1 **c)** 3 **d)** návod: $4^{n+1} = (2^2)^{n+1} = 2^{2n+2}$, hledáme limitu z výrazu: $lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+2}} = 0$ **e)** ∞ **f)** návod: upravíme do tvaru: $lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3 = 0$ **3.a)** 3 **b)** 0 **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** 4 **e)** 1 **4.a)** $\frac{1}{3}$ **b)** návod: ve vzorci pro n-tý člen je první částí aritmetická posloupnost, určíme její součet, tj. řešíme $lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n}{3}\right) = \infty$ **c)** návod: rozšíříme $\sqrt{n^2+n}+n$, $lim_{n\to\infty}a_n = \frac{1}{2}$ **5.a)** 0 **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** ∞ **d)** $\frac{1}{16}$ **6.a)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 3^n$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}a\right)^{n-1}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(-a)$ **e)** $\sum_{n=1}^{\infty}2x^{n-3}$ **7.a)** $\sum_{n=1}^{\infty}3^n = 3+9+27+81+\cdots$, $a_1 = 3$, $q = 3$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}x^{-2n} = \frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}+2+2x+2x^2+2x^3+\cdots$, $a_1 = \frac{x^2}{}$, $q = \frac{1}{x^2}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}3(-1)^{n-1} = 3-3+3-3+3-\cdots$, $a_1 = 3$, $q = -1$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}3(x-1)^n = 3(x-1)+3(x-1)^2+3(x-1)^3+3(x-1)^4+\cdots$, $a_1 = 3(x-1)$, $q = x-1$ **e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-2}} = 6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots$, $a_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^n = \sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}+\cdots$, $a_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}^{-n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **8.a)** $a_1 = \frac{5}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $s = 5$ **b)** $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{3}$ **c)** $a_1 = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{3}$, $s = -\frac{3}{8}$ **d)** $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $s = 1$ **e)** $a_1 = 3$, $q = \frac{2}{3}$, $s = 9$ **f)** $a_1 = -\frac{3}{4}$, $q = -\frac{3}{4}$, $s = -\frac{3}{7}$ Všechny řady jsou konvergentní. **9.a)** $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $s = \frac{3}{1-3x}$ **b)** $x \in (0,1)$, $s = \frac{2x-1}{2-2x}$ **c)** $x \in (-1,1)$, $s = \frac{x^2}{1-x^2}$ **d)** $|q| = |x^2+4| = x^2+4 > 1$, řada je divergentní pro jakékoliv reálné číslo x **e)** $x \in (-2,0)$, $s = -1-\frac{1}{x}$ **f)** $q = 2 > 1$, řada je divergentní pro jakékoliv reálné číslo x **g)** $x \in (0,2)$, $s = \frac{1}{2-x}$ **10.** levá strana představuje nekonečnou řadu, pro vhodné x určíme její součet a rovnici vypočítáme. **a)** $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\frac{-2}{1+2x} = -1$, $K = \emptyset$, protože $x = \frac{1}{2} \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **b)** $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\frac{3}{1-3x} = 30$, $K = \{0,3\}$ **11.** levá strana představuje nekonečnou řadu, pro vhodné x určíme její součet a rovnici vypočítáme. **a)** $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\frac{3-4x}{1-(3-4x)} = -\frac{1}{2x}$, $K = \emptyset$, protože $x = 1$ nebo $x = \frac{1}{4} \notin \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. **b)** $x \in (1,3)$, $\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2} = \frac{1}{6}$, $K = \{2 \pm \frac{\sqrt{7}}{7}\}$ **12.a)** např. $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ **b)** $a_1 = \frac{1}{6}$, $q = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots$ **c)** $a_1 = -\frac{1}{5}$, $q = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}-\frac{1}{40}-\cdots$ **13.a)** levou stranu rozdělíme na součet dvou nekonečných řad: 1. $x+x^3+x^5+\cdots$, 2. $3x^2+3x^4+3x^6+\cdots$. $x \in (-1,1)$, získáme rovnici: $\frac{x}{1-x^2}+\frac{3x^2}{1-x^2} = \frac{5}{3}$, $K = \{-\frac{5}{7}, \frac{1}{2}\}$. **b)** $x < 0$, $\frac{2^x}{1-2^x} = 1$, $K = \{-1\}$ **c)** $x \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, $\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{4x-3}{3x-4}$, $K = \{6\}$ Druhé řešení neleží v oboru hodnot neznámé x. **d)** $x \in (-\infty,-4)\cup(4,\infty)$ $3+\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{x+4}{x}} = \frac{2x+1}{x-1}$, $K = \{6\}$.