LIMITA FUNKCE

- limita funkce, vlastní limita, nevlastní limita, limita v nevlastním bodě, limita ve vlastním bodě. Asymptoty grafu funkce.

1. Vypočítejte limitu ve vlastním bodě:

   a) $\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{7}=$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{x+1}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin 2x}{x-1}=$ d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)=$

   e) $\lim_{x\to -1}(3^x-2^x)=$ f) $\lim_{x\to 1}(\log_2 4x-\ln x)=$ g) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2+2x-2}=$ h) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x-25}{x^3-3x^2+9x+5}=$

2. Vypočítejte limitu ve vlastním bodě:

   a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=$ b) $\lim_{x\to -2}\frac{4x^2-16}{x+2}=$ c) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-2}{x^3+1}=$ d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=$

   e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}=$ f) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-12x+18}{x^4-81}=$ g) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{6x}{8-x^3}\right)=$ h) $\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}=$

3. Vypočítejte:

   a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}=$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}=$ c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2+14x+6}{4x^2+18x+8}=$ d) $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-5x-6}{x^2-7x+6}=$

   e) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^4}{1+x-2x^2}=$ f) $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{2-5x-3x^2}{1-27x^3}=$ g) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4+x^2-6}{x^4-2x^2}=$ h)* $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4-8x^2-9}=$

4. * Vypočítejte:

   a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-5\cos x+2}$ b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+3\sin x-4}{\sin^2 x+4\sin x-5}$ c) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-4}{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x-5}$ d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}^2 x}{1-\operatorname{cotg}^2 x}$

5. Vypočítejte:

   a) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x+3}{x^3+3x^2-2}$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^4+4x+3}$ c)* $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-x^3}$

6. Vypočítejte:

   a) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+9}-3}=$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}=$ d) $\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{\sqrt{x-1}-3}=$

   e) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}}=$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}-1}=$ g) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x}-2\sqrt{2}}=$ h) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}=$

7. Vypočítejte:

   a) $\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\operatorname{tg} x-1}=$ b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{1-\cos 2x}=$ c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=$ d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=$

   e) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{\sin 2x}=$ f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{cotg} x}{\cos x-\sin x}=$ g) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{cotg} x+1}{\operatorname{tg} x+1}=$

8. * Vypočítejte:

   a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 x}=$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{\sin^2 x}=$ c) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 2x}{1-\sqrt{\cos x+2}}=$

9. Vypočítejte, využijte platnosti: $lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

   a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{9x^3}=$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin 7x}{2x}=$

   e) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 3x}=$ g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+x}{2x}=$ h) $\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\sin 2x}{x}=$

10. Určete limitu funkce v nevlastním bodě:

    a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{3x-5}=$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3}{x^2+x-2}=$ c) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2-4x}{3+10x}=$ d) $\lim_{x\to -\infty}3x^4-2x^3+5=$

e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+x^3-4}{3x^5+x^3-2}=$ f) $\lim_{x\to\infty}x^3-x+2=$ g)* $\lim_{x\to\infty}\frac{3\log x-2}{\log x+3}=$ h)* $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{x^2-3x+2}=$

i) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3}{x^3+3}=$ j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^4-4}$ k) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}=$

11. Určete jednostrannou limitu:

a) $\lim_{x\to4^+}\frac{3x+1}{x-4}=$ b) $\lim_{x\to0^+}\frac{2x+4}{x}=$ c) $\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x+1}=$ d) $\lim_{x\to5^-}\frac{2x-1}{x-5}=$

e) $\lim_{x\to2^+}\frac{5}{(2-x)^3}=$ f) $\lim_{x\to2^-}\frac{5}{(2-x)^2}=$ g) $\lim_{x\to3^-}\frac{3x^2+5}{9-x^2}=$ h) $\lim_{x\to3^+}\frac{3x^2+4}{9-x^2}=$

12. Určete asymptoty grafů funkce:

a) $f: y=\frac{x+4}{x-2}$ b) $f: y=\frac{2x-3}{x-2}$ c) $f: y=\frac{1-4x}{x}$ d) $f: y=\frac{5}{2x-4}$ e) $f: y=\frac{5-x}{x^2-4}$

f) $f: y=\frac{3}{x^2+1}$ g) $f: y=x^2-4$ h) $f: y=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$ i) $f: y=\frac{4-2x^2}{x^2-4x+3}$ j) $f: y=\frac{-2x^3+x+1}{x^2-x}$

ŘEŠENÍ:

1.a) 1 **b)** 1 **c)** -1 **d)** 0 **e)** $-\frac{1}{6}$ **f)** 2 **g)** 0 **h)** $-\frac{1}{2}$ **2.a)** 6 **b)** -16 **c)** $-\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** 0 **f)** 0 **g)** 0 **h)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **3.a)** $-\frac{1}{5}$ **b)** -4 **c)** $\frac{5}{7}$ **d)** $\frac{7}{5}$ **e)** $\frac{8}{3}$ **f)** $\frac{7}{3}$ **g)** $\frac{5}{2}$ **h)** $\frac{11}{60}$ **4.a)** -1 **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **5.a)** $-\frac{5}{3}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** 6 **d)** $-\frac{1}{3}$ **6.a)** 4 **b)** 12 **c)** -12 **d)** $3+\sqrt{11}$ **e)** $-4,5$ **f)** $\frac{2}{3}$ **g)** $\sqrt{2}2$ **h)** -2 **7.a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 0 **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** $-\sqrt{2}$ **g)** -1 **8.a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **c)** -16 **9.a)** 2 **b)** 1 **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** 6 **e)** 1 **f)** $\frac{7}{3}$ **g)** $\frac{1}{2}$ **h)** 2 **10.a)** $\frac{1}{3}$ **b)** 3 **c)** $-\frac{2}{5}$ **d)** ∞ **e)** $\frac{2}{3}$ **f)** ∞ **g)** 3 **h)** ∞ **i)** ∞ **j)** 0 **k)** 1 **11.a)** ∞ **b)** ∞ **c)** $-\infty$ **d)** $-\infty$ **e)** $-\infty$ **f)** ∞ **g)** ∞ **h)** $-\infty$ **12.a)** ABS: $x=2$, ASS: $y=1$ **b)** ABS: $x=2$, ASS: $y=2$ **c)** ABS: $x=0$, ASS: $y=-4$ **d)** ABS: $x=2$, ASS: $y=0$ **e)** ABS: $x=2$, ASS: $y=0$ **f)** ABS: neexistuje, funkce je spojitá v celém definičním oboru. ASS: $y=$ é **g)** asymptoty neexistují, jedná se o graf kvadratické funkce, tj. paraboly. **h)** ABS: $x=-3$, ASS: $y=1$ **i)** ABS: $x=1$, $x=3$ ASS: $y=-2$ **j)** ABS: $x=0$, ASS: $y=-2x-2$

PŘEHLED NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH LIMIT:

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^n} = 0, n \in \mathbf{N}$
- $lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje

Je-li $a \in (0,1)$:

- $\lim_{x\to -\infty} a^x = \infty$
- $\lim_{x\to \infty} a^x = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty$
- $\lim_{x\to \infty} \log_a x = -\infty$

Je-li $a \in (1,\infty)$:

- $\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$
- $\lim_{x\to \infty} a^x = \infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$
- $\lim_{x\to \infty} \log_a x = \infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to \infty} \ln x = \infty$

- $\lim_{x\to \infty} \sin x$ neexistuje
- $\lim_{x\to -\infty} \sin x$ neexistuje
- $\lim_{x\to \infty} \cos x$ neexistuje
- $\lim_{x\to -\infty} \cos x$ neexistuje
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{cotg} x = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$