

KRUŽNICE

- Kružnice jako množina bodů, kružnice jako řez kuželové plochy rovinou, středová rovnice kružnice, obecná rovnice kružnice, vzájemná poloha kružnice a přímky, sečna kružnice, vnější přímká kružnice, tečna kružnice v dotykovém bodě, tečna z bodu ke kružnici, polára kružnice k danému bodu, vnitřní a vnější bod kružnice, bod na kružnici. Kruh, vnější oblast kruhu.
1. Napište analytické vyjádření kružnice $k(S, r)$ a kruhu $K(S, r)$, kde
a) $S[-3; 4], r = 4$ b) $S[0; 3], r = \sqrt{3}$ c) $S[-1; -3], r = 6$
 2. Rozhodněte, jaké útvary jsou zadané následujícím analytickým vyjádřením:
a) $(x - 3)^2 + (y - 0, 4)^2 \leq 5$ b) $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 < 4$ d) $(x - 3)^2 + y^2 > 2, 25$
 3. Zjistěte, jakou polohu mají body $K[2; -4], L[2; 3], M[0; 0]$ vzhledem ke kružnici $k : (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.
 4. Napište rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka AB . a) $A[2; 4], B[-6; 4]$ b) $A[0; -3], B[6; 3]$
 5. Napište středovou rovnici kružnice, je-li dán střed a poloměr kružnice:
a) $S[0; 0], r = 3$ b) $S[0; 1], r = 4$ c) $S[-2; 3], r = \sqrt{2}$.
 6. Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-2; 4]$ a prochází bodem $A[5; 4]$.
 7. Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic a bodem $K[6; -2]$. Dále je známo, že součet souřadnic středu je roven číslu 8. Určete průsečíky kružnice s osami souřadnic x, y .
 8. Napište rovnici kružnice, která prochází body $K[2; 3], L[-4; 1]$ a má střed:
a) na ose x b) na ose y c) na přímce $y = -x$ d) na přímce $y = x + 1$
e) na přímce $x - y + 9 = 0$ f) na přímce $x = 1 + t, y = 1 - t, t \in \mathbf{R}$.
 9. Napište rovnici kružnice, která prochází body $R[2; -3], P[4; -1], T[0; 3]$.
 10. Napište rovnice kružnice opsané trojúhelníku ABC . Vypočítejte souřadnice středu a poloměr kružnice.
a) $A[0; -5], B[-1; 2], C[2; 1]$ b) $A[0; 0], B[0; 4], C[8; 4]$
 11. Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x v bodě $X[-4; 0]$ a osu y protíná v bodě $Y[0; 6]$.
 12. Napište rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[4; -5]$ a dotýká se přímky $p : 3x + 4y - 6 = 0$.
 13. Napište rovnici kružnice, která se osy x dotýká v bodě $T[3; 0]$ a prochází bodem $M[4; 6]$.
 14. Napište rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka AB :
a) $A[-3; 0], B[3; 4]$ b) $A[-2; 2], B[-5; -2]$ c) $A[1; 3], B[6; 4]$
 15. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky $p : x - 2y - 4 = 0$ v bodě $P[2; -1]$ a má poloměr $r = 2\sqrt{3}$.
 16. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[4; -5]$ a na přímce $p : 2x - y - 4 = 0$ vytíná tětivu délky 4.
 17. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[2; 3], B[4; 1]$ a dotýká se osy y .
 18. Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y . Střed kružnice leží na přímce $p : x + y - 3 = 0$.
 19. Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y . Její střed leží na přímce $y - 4 = 0$.
 20. Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y a prochází bodem $K[-6; 3]$.
 21. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímk $x = 2$ a $x = 0$ a prochází bodem $C[2; 4]$.
 22. Najděte souřadnice středu a poloměr kružnice či kruhu, jejichž analytické vyjádření je:
a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2y = 5$ c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 13 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 12x - 13 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 8y < 9$ f) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ g) $x^2 + y^2 + 8x \leq 0$ h) $x^2 + y^2 - \sqrt{8}x + \sqrt{12}y > 9$
 23. Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a dotýká se přímky $x - 5 = 0$.
 24. Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathbf{R}$, pro něž rovnice $x^2 + y^2 + 6x - 10y + m = 0$ vyjadřuje rovnici kružnice.
 25. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středy kružnic $(x + 3)^2 + y^2 = 16, (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
 26. Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, jejíž střed leží na ose x a která se dotýká přímk $x - 3 = 0, y - 8 = 0$.
 27. Napište středové rovnice všech kružnic, které se dotýkají souřadnicových os a procházejí bodem:
a) $P[1; 2]$ b) $Q[2; 1]$ c) $R[-4; -4]$ d) $T[-5; 3]$.
 28. Napište středovou rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC .
a) $A[3; -1], B[2; 0], C[-1; 1]$ b) $A[0; 0], B[0; 3], C[4; 0]$ c) $A[1; 3], B[2; 8], C[-2; 5]$.

29. Rozhodněte, která z následujících rovnic je rovnicí kružnice:
 a) $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 6 = 0$ b) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 50 = 0$ c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ d) $3x^2 + 3y^2 + 4y - 5x + 11 = 0$
30. Určete polohu bodu $T[1; -2]$ vzhledem ke kružnici a k její vnitřní a vnější oblasti. Kružnice má rovnici:
 a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + (y - 2)^2 - 5 = 0$ c) $x^2 + y^2 = 25$ d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ e) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$
31. Najděte rovnici kružnice souměrně sdružené s kružnicí $k : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$ vzhledem k přímce $p : x + y - 3 = 0$.
32. Napište rovnici kružnice, je-li dán její střed a rovnice přímky, která se jí dotýká:
 a) $S[0; -4], x - y + 3 = 0$ b) $S[2; 4], 3x - 4y + 5 = 0$
33. Určete rovnice všech kružnic, které se dotýkají osy y , procházejí bodem $M[4; 3]$ a mají střed na přímce procházející středy kružnic $k_1 : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 + 12x - 4y = 0$.
34. Určete průsečíky os souřadnic x, y s kružnicí: a) $x^2 + y^2 + 4x - 5y = 0$ b) $x^2 + y^2 - 10x - 24 = 0$
 c) $x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$.
35. Je dána kružnice $k(S, r)$, $S[2; -5]$. Kružnice se dotýká osy y . Určete průnik kružnice s přímkami AB, BC, CA , je-li dáno: $A[3; -4], B[4; -3], C[0; 0]$.
36. Určete souřadnice společných bodů přímky $x - 7y - 12 = 0$ a kružnice $k : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.
37. Určete vzájemnou polohu přímky a kružnice:
 a) $p : x - 2y - 6 = 0$, $k : x^2 + y^2 - 5y - 4x - 1 = 0$ b) $p : x + y - 4 = 0$, $k : x^2 + y^2 + 14x + 18y + 114 = 0$
 c) $p : 2x + y = 0$, $k : x^2 + y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$ d) $p : 2x + y + 1 = 0$, $k : (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$
 e) $p : 3x + y - 10 = 0$, $k : x^2 + y^2 = 1$.
38. Určete obecnou rovnici kružnice, která prochází bodem $K[4; -4]$, $L[2; -6]$ a průsečíky kružnice $x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$ s přímkou $y = -x$.
39. Určete souřadnice společných bodů kružnic daných rovnicemi:
 a) $k_1 : x^2 + y^2 = 16$, $k_2 : x^2 + y^2 - 8x - 4y - 65 = 0$ b) $k_1 : x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.
40. Určete všechna reálná čísla a , pro něž má kružnice $k : x^2 + y^2 = 9$ s danou přímkou p právě jeden bod.
 a) $p : 2x - y + a = 0$ b) $p : ax + 4y - 16 = 0$ c) $x + ay = 0$.
41. Najděte rovnici kružnice, která prochází průsečíky kružnic $k_1 : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 13x - 9y + 30 = 0$ a a) bodem $P[0; 0]$ b) bodem $Q[2; 7]$
 c) průsečíkem přímek $4x - y + 2 = 0$, $5x - 3y - 8 = 0$.
42. Najděte rovnici tečny kružnice v daném bodě:
 a) kružnice $x^2 + y^2 = 25$, bod $T[4; 3]$ b) kružnice $x^2 + (y - 1)^2 = 10$, bod $T[x, 2], x > 0$
 c) kružnice $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$, bod $T[2; -1]$.
43. Určete všechna reálná čísla m , pro něž je přímka p tečnou kružnice k :
 a) $p : 4x + 3y + m = 0$, $k : x^2 + y^2 = 16$ b) $p : x = -3 + k, y = 2 + mk, k \in \mathbf{R}, k : x^2 + (y - 1)^2 = 9$.
44. Určete rovnice tečen v jejích bodech T :
 a) $x^2 + (y - 2)^2 = 25$, $T[3; ?]$ b) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 20$, $T[?; -3]$.
45. Napište rovnice tečen dané kružnice k , které jsou rovnoběžné s přímkou p :
 a) $k : (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 13$, $p : -2x + 3y - 5 = 0$ b) $k : x^2 + y^2 - 5x + 7y + 3 = 0$, $p : x + 4y - 6 = 0$.
46. Napište rovnice tečen dané kružnice k , které jsou kolmé k přímce p :
 a) $k : (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 13$, $-2x + 3y - 5 = 0$ b) $k : x^2 + y^2 - 5x + 7y + 3 = 0$, $p : x + 4y - 6 = 0$.
47. Najděte rovnice tečen vedených z bodu P ke kružnici k :
 a) $P[7; 2]$, $k : x^2 + y^2 - 6x - 16y + 57 = 0$ b) $P[1; 7]$, $k : x^2 + y^2 = 25$.
48. V průsečících kružnice $k : x^2 + y^2 = 42$ s přímkou $p : 7x - 3y - 21 = 0$ sestrojte tečny a určete jejich společný bod.
49. Napište rovnice tečen vedených z bodu $A[2; 1]$ ke kružnici $k : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$.
50. Určete vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 = 20$ a přímky $p : x - 3y + c = 0$, kde c je reálný parametr.
51. Určete velikost úhlu, pod kterým je vidět kružnici k z bodu R :
 a) $k : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$, $R[3; 0]$ b) $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, $R[-2; 5]$.
52. * Určete společné tečny kružnic k, l :
 a) $k : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$, $l : (x - 11)^2 + (y - 3)^2 = 4$ b) $k : x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$, $l : x^2 + y^2 = 9$
 c) $k : x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$, $l : x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$.
53. * Jsou dány body $A[1; 1], B[5; -2]$. Určete rovnice všech kružnic, které se dotýkají osy x a v bodě A přímky AB .

ŘEŠENÍ:

1. Analytickým vyjádřením je např. středová rovnice kružnice k a kruhu K . **a)** $k : (x+3)^2 + (y-4)^2 = 16$, $K : (x+3)^2 + (y-4)^2 \leq 16$ **b)** $k : x^2 + (y-3)^2 = 3$, $K : x^2 + (y-3)^2 \leq 3$
c) $k : (x+1)^2 + (y+3)^2 = 36$, $K : (x+1)^2 + (y+3)^2 \leq 36$ **2.a)** kruh $S[3; 0, 4]$, $r = \sqrt{5}$ **b)** kružnice $S[0; 1]$, $r = 3$ **c)** vnitřní oblast kružnice, vnitřek kruhu $S[-1; 2]$, $r = 2$ **d)** vnější oblast kružnice (kruhu), $S[3; 0]$, $r = 1, 5$ **3.** Polohu poznáme podle čísla, které dostaneme dosazením souřadnic bodu do rovnice kružnice. **a)** $k(K) = 1 < 25$, bod K leží ve vnitřní oblasti kružnice. **b)** $k(L) = 50 > 25$. Bod L leží ve vnější oblasti kružnice. **c)** $k(M) = 25 = 25$, bod M leží na kružnici. **4.a)** $k : (x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$ **b)** $k : (x-3)^2 + y^2 = 18$ **5.a)** $k : x^2 + y^2 = 9$ **b)** $k : x^2 + (y-1)^2 = 16$ **c)** $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$ **6.** Středová rovnice: $k : (x+2)^2 + (y-4)^2 = 49$, obecná rovnice: $k : x^2 + y^2 + 4x - 8y - 29 = 0$ **7.** Je-li $S[m; n]$ pak $m + n = 8$. Druhou rovnici obdržíme odečtením kvadratických rovnic, které získáme, dosadíme-li do středové rovnice kružnice tj. $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ postupně body kružnice tj. K a O . Středová rovnice: $k : (x-16, 5)^2 + (y+8, 5)^2 = 344, 5$, obecná rovnice $k : x^2 + y^2 - 33x + 17y = 0$. Průsečíky s osami: $P_x[0; 0] = P_y$, $P_y[0; -17]$, $P_x[33; 0]$. **8.a)** $S \in x; S[m; 0]$, $k : (x+\frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{130}{9}$ **b)** $S \in y; S[0; n]$, $k : x^2 + (y+1)^2 = 20$ **c)** $S[m; -m]$, $k : (x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 12, 5$ **d)** $S[m; m+1]$, $k : (x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 12, 5$ **e)** $S[n-9; n]$, $k : (x+2, 5)^2 + (y-6, 5)^2 = 32, 5$ **f)** $S[1+t; 1-t]$, $k : (x+1, 5)^2 + (y-3, 5)^2 = 12, 5$ **9.** $k : (x-1)^2 + y^2 = 10$ **10.a)** $k : (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = 12, 5$, $S[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ **b)** $k : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$, $S[4; 2]$, $r = 2\sqrt{5}$ **11.** Osa x je tečnou kružnice, bod X je bodem dotyku, na kolmici z tohoto bodu leží střed, proto $S[-4; n]$. $k : (x+4)^2 + (y-\frac{13}{3})^2 = \frac{169}{9}$. **12.** Přímka p se dotýká hledané kružnice k . Poloměr kružnice je roven vzdálenosti středu S od přímky p . $k : (x-4)^2 + (y+5)^2 = \frac{196}{25}$. **13.** Osa x je tečnou hledané kružnice, bod T je bodem dotyku, na kolmici vedené tímto bodem k ose x leží střed hledané kružnice. $S[3; n]$, $k : (x-3)^2 + (y-\frac{37}{12})^2 = \frac{1369}{144}$. **14.a)** $k : x^2 + (y-2)^2 = 13$ **b)** $k : (x+\frac{7}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ **c)** $k : (x-\frac{7}{2})^2 + (y-\frac{7}{2})^2 = \frac{26}{4}$ **15.** Kružnice budou dvě. Střed kružnic leží na kolmici vedené bodem P k přímkce p , která je tečnou hledané kružnice. Protože střed hledané kružnice leží na kolmici, můžeme pomoci ní vyjádřit souřadnice středu $S[m; 3-2m]$ a napsat středovou rovnici kružnice. Do této rovnice dosadíme souřadnice bodu, který na kružnici leží, tj. bodu P a dopočítáme souřadnice středu m . $k_1 : (x-2-\frac{2}{5}\sqrt{15})^2 + (y+1+\frac{4}{5}\sqrt{15})^2 = 12$, $k_2 : (x-2+\frac{2}{5}\sqrt{15})^2 + (y+1-\frac{4}{5}\sqrt{15})^2 = 12$ **16.** Využíváme náčrtku. Kolmice na p procházející středem kružnice S protíná tětivu v polovině a v bodě R . Trojúhelník SBR je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu R . Poloměr kružnice určíme dopočítáním z tohoto trojúhelníku. Přitom $|SR| =$ vzdálenost bodu S od přímky p a $|RB| = 2$. $k : (x-4)^2 + (y+5)^2 = \frac{101}{5}$ **17.** Kružnice se dotýká osy y , je to její tečna. Proto je x -ová souřadnice středu S rovna poloměru. tj. $m = r$. Hledané kružnice jsou dvě: $k_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, $k_2 : (x-10)^2 + (y-9)^2 = 100$. **18.** Návod: osa x i osa y jsou tečny. Proto středy hledaných kružnic leží buď na přímce $y = x$ nebo na přímce $y = -x$. To, o kterou variantu se jedná, lze poznat podle zadaného bodu kružnice nebo podle daného objektu, na němž leží střed kružnice. Je možné počítat i obě varianty, z nichž vyjde pouze jedna. 1.varianta: $S[m; m]$, $r = |m|$, 2.varianta: $S[m; -m]$, $r = |m|$. Hledanou kružnici je kružnice $k : (x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$. **19.** Návod viz. 18. Jsou možné obě varianty: $k_1 : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$, $k_2 : (x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$. **20.** Návod viz. 18. Pouze druhá varianta: $k_1 : (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$, $k_2 : (x+15)^2 + (y-15)^2 = 225$. **21.** Přímky jsou tečnami kružnice a jsou navzájem rovnoběžné. Střed hledané kružnice leží na ose pásu rovnoběžek p, q tj. $x = 1$. Tedy střed $S[1; n]$. Hledaná kružnice $k : (x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$. **22.a)** kružnice $S[-2; 3]$, $r = 6$ **b)** kružnice $S[0; -1]$, $r = \sqrt{6}$ **c)** kružnice $S[4; -3]$, $r = 2\sqrt{3}$ **d)** kružnice $S[-6; 0]$, $r = 7$ **e)** vnitřní oblast kruhu (kružnice) $S[0; 4]$, $r = 5$ **f)** kružnice $S[-3; 2]$, $r = 4$ **g)** kruh $S[-4; 0]$, $r = 4$ **h)** vnější oblast kruhu (kružnice) $S[\sqrt{2}; -\sqrt{3}]$, $r = \sqrt{14}$ **23.** Vyjdeme z obrázku: středová rovnice: $k : x^2 + y^2 = 25$, obecná rovnice: $k : x^2 + y^2 - 25 = 0$. **24.** $m \in (-\infty; 34)$ **25.** $p : 3x - 4y + 9 = 0$ **26.** Střed leží na ose x tj. $S[m; 0]$. Z obrázku je zřejmé, že kružnice se protíná přímkou $x-3=0$ v bodě $P[0; 3]$. Protože střed leží na ose x a přímka $y-8=0$ je s osou x rovnoběžná, platí $r = 8$. Hledané kružnice jsou dvě: středové rovnice: $k_1 : (x-11)^2 + y^2 = 64$, $k_2 : (x+5)^2 + y^2 = 64$. $k_1 : x^2 + y^2 - 22x + 57 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 + 10x - 39 = 0$. **27.** Návod viz. 18.: **a)** $k_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $k_2 : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **b)** $k_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $k_2 : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **c)** $k_1 : (x+8-4\sqrt{2})^2 + (y+8-4\sqrt{2})^2 = 96 - 64\sqrt{2}$, $k_2 : (x+8+4\sqrt{2})^2 + (y+8+4\sqrt{2})^2 = 96 + 64\sqrt{2}$. **d)** $k_1 : (x+8-\sqrt{30})^2 + (y-8-\sqrt{30})^2 = 94 - 16\sqrt{30}$, $k_2 : (x+8+\sqrt{30})^2 + (y-8+\sqrt{30})^2 = 94 + 16\sqrt{30}$. **28.a)** $k : (x+1)^2 + (y+4)^2 = 25$, **b)** $k : (x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$ **c)** $k : (x-\frac{21}{34})^2 + (y-\frac{193}{34})^2 = \frac{4225}{578}$. **29.a)** kružnice $S[-2, 5; 1, 5]$, $r = \sqrt{14, 5}$ **b)** kružnice $S[4; 0]$, $r = \sqrt{41}$ **c)** kružnice $S[-3; 2]$, $r = 5$ **d)** nejedná se o rovnici kružnice. Po úpravě na středový tvar rovnice musí na výjít na jedné straně rovnice číslo kladné, protože je to druhá mocnina poloměru. **30.** Polohu bodu poznáme, dosadíme-li souřadnice bodu do středového tvaru rovnice kružnice a porovnáme výsledek s druhou mocninou poloměru. **a)** leží ve vnější oblasti **b)** leží ve vnější oblasti **c)** leží ve vnitřní oblasti **d)** leží na kružnici **e)** leží ve vnitřní oblasti **31.** Poloměry souměrně sdružených kružnic jsou shodné. Stačí najít osově souměrný obraz středu. Pro středy S zadané kružnice a S' hledané kružnice platí: středy leží na jedné přímce, která je kolmá k ose souměrnosti tj. přímce p a protíná ji v bodě P , pak $\frac{S+P}{2} = P$, tj. P je střed úsečky SS' . $k' : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 1$. **32.** Poloměr hledané kružnice je roven vzdálenosti středu kružnice od přímky, které se kružnice dotýká tj. od tečny. Jsme v rovině, proto lze použít vzorec pro vzdálenost bodu od přímky $v(D, p) = \frac{|ad_1+bd_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **a).** **a)** $k : x^2 + (y+4)^2 = 24, 5$ **b)** $k : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$ **33.** přímka spojující středy kružnic má parametrickou rovnici $p = \{[3-3t; -1+t]\}$. Střed hledané kružnice leží na této přímce, proto má souřadnice $S[3-3t; -1+t]$. Protože se kružnice dotýká osy y , platí pro poloměr $r = |m|$, kde m je x -ová souřadnice středu hledané kružnice. Sestavíme středovou rovnici kružnice a využijeme toho, že bod M leží na kružnici, tím získáme jednu kvadratickou rovnici pro neznámou t . $k_1 : (x-27+6\sqrt{14})^2 + (y+9-2\sqrt{14})^2 = (27-6\sqrt{14})^2$, $k_2 : (x-27-6\sqrt{14})^2 + (y+9+2\sqrt{14})^2 = (27+6\sqrt{14})^2$. **34.a)** $P_x = P_y = [0; 0]$, $P_{x_1}[-4; 0]$, $P_{y_1}[0; 5]$ **b)** $P_{x_1}[12; 0]$, $P_{x_2}[-2; 0]$, $P_{y_1}[0; 2\sqrt{6}]$, $P_{y_2}[0; -2\sqrt{6}]$. **c)** průsečík s osou x neexistuje, $P_{y_1}[0; -2]$, $P_{y_2}[0; -4]$ **d)** Neexistuje průsečík ani s osou x ani s osou y . **35.** Poloměr hledané kružnice je roven vzdálenosti středu kružnice od osy y , tj. $r = 2$. $k : (x-2)^2 + (y+5)^2 = 4$. Průsečíky s přímkou AB : $P_1[2+\sqrt{2}; -5+\sqrt{2}]$, $P_2[2-\sqrt{2}; -5-\sqrt{2}]$, průsečíky s přímkou BC neexistují, přímka je vnější přímkou kružnice.

Průsečíky s přímkou AC : $P_1[\frac{78}{25} - \frac{3\sqrt{51}}{25}; -\frac{104}{25} + \frac{4\sqrt{51}}{25}]$, $P_2[\frac{78}{25} + \frac{3\sqrt{51}}{25}; -\frac{104}{25} - \frac{4\sqrt{51}}{25}]$. **36.** Hledanými body jsou body $X_1[6, 68; -0, 76]$, $X_2[-2; -2]$ **37.a)** vnější příмка **b)** vnější příмка **c)** sečna, průsečíky $X_1[\frac{4+\sqrt{31}}{5}; \frac{-8-2\sqrt{31}}{5}]$, $X_2[\frac{4-\sqrt{31}}{5}; \frac{-8+2\sqrt{31}}{5}]$ **d)** sečna, průsečíky: $X_1[-1, 4; 1, 8]$, $X_2[-3; 5]$. **e)** vnější příмка **38.** Společným bodem přímky a kružnice je počátek soustavy souřadnic $O[0; 0]$. Hledaná kružnice má rovnici: $k: x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$. **39.a)** kružnice se neprotínají **b)** kružnice se protínají ve dvou bodech $X_1[9; 5; 5]$, $X_2[-3; 1; 5]$. **40.** Po dosazení rovnice přímky do rovnice kružnice získáme kvadratickou rovnici s jednou neznámou a parametrem a . Protože chceme, aby kružnice s přímkou měla pouze jeden společný bod, pak výsledkem kvadratické rovnice musí být pouze jedno číslo a to bude tehdy, když diskriminant kvadratické rovnice bude roven nule. Proto pouze zjišťujeme, pro které a je diskriminant nulový. Bod dotyku nehledáme, není v zadání napsáno, že jej máme najít. **a)** $a = \pm 3\sqrt{5}$ **b)** $a = \pm \frac{4}{3}\sqrt{7}$. **41.** Hledanými průsečíky kružnic jsou body: $X_1[3; 0]$, $X_2[2; 1]$. **a)** $k: (x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$ **b)** $k: (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **c)** průsečík přímek $P[-2; -6]$, $k: (x + \frac{7}{22})^2 + (y + \frac{51}{22})^2 = \frac{3965}{242}$. **42.a)** $t: 4x + 3y - 25 = 0$ **b)** $t: 3\sqrt{11}x + y - 100 = 0$ **c)** $t: 3x + 4y - 27 = 0$ **43.** návod viz. 40. **a)** $m = \pm 20$ **b)** $m = \frac{4}{3}$. **44.** Souřadnici, kterou neznáme, dopočítáme z rovnice kružnice. Bod dotyku leží na kružnici. **a)** $T_1[3; 6]$; $t_1: 3x + 4y - 33 = 0$, $T_2[3; -2]$; $t_2: 3x - 4y - 17 = 0$. **b)** Tečna neexistuje, bod dotyku o zadané y -ové souřadnici neexistuje. **45.** Hledaná tečna je příмка rovnoběžná se zadanou přímkou p . Mají stejnou množinu normálových vektorů. Získáme tak rovnici tečny s parametrem c , kterou po vyjádření dosadíme do rovnice kružnice. Vyjde nám kvadratická rovnice o jedné neznámé a parametru c . Protože tečna má s kružnicí jeden společný bod a nám stačí určit parametr c , hledáme pouze, kdy je diskriminant rovnice roven nule. **a)** $t_1: 2x - 3y - 31 = 0$, $t_2: 2x - 3y - 5 = 0$ **b)** $t_1: x + 4y + 11,5 + \sqrt{263,5} = 0$, $t_2: x + 4y + 11,5 - \sqrt{263,5} = 0$ **46.** postup stejný jako v př.45 s tím rozdílem, že hledaná tečna je kolmá k zadané přímce. Proto normálový vektor zadané přímky je směrovým vektorem hledané tečny. **a)** $t_1: 3x + 2y - 14 + \frac{432,25}{\sqrt{432,25}} = 0$, $t_2: 3x + 2y - 14 - \frac{432,25}{\sqrt{432,25}} = 0$ **b)** $t_1: 4x - y - 105,5 + \sqrt{11211,5} = 0$, $t_2: 4x - y - 105,5 - \sqrt{11211,5} = 0$ **47.** lze řešit pomocí rovnice pro poláru **a)** $t_1: x - 7 = 0$, $t_2: 5x - 12y - 59 = 0$ **b)** $t_1: 3x - 4y + 25 = 0$, $t_2: 4x + 3y - 25 = 0$. **48.** V zadání není napsáno, že máme najít tečny, ale máme je pouze sestavit, tj. např. využít náčrtku. Zadaná příмка, která protíná kružnice je polárou bodu, který je průsečíkem sestavených tečen. Označme hledaný průsečík tečen $M[m_1; m_2]$, pak rovnice poláry dle vzorce je $m_1x + m_2y = 42$. Současně již známe rovnici poláry tj. $7x - 3y = -21$. Tj. stejná příмка je vyjádřena dvěma rovnicemi. Aby to byly rovnice téže přímky, musí být jedna rovnice násobkem druhé. Vidíme, že první rovnice je -2 násobkem druhé rovnice. Hledaným bodem je bod $M[-14; 6]$. **49.** $t_1: (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})x + (\sqrt{3} - 0,5)y - 1,5 - 2\sqrt{3} = 0$, $t_2: (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})x - (\sqrt{3} + 0,5)y - 1,5 + 2\sqrt{3} = 0$ **50.** tečna $c = \pm 10\sqrt{2}$, sečna $c \in (-10\sqrt{2}; 10\sqrt{2})$, vnější příмка $c \in (-\infty, -10\sqrt{2}) \cup (10\sqrt{2}, \infty)$. **51.a)** $\alpha = 106^\circ 16'$ **b)** $\alpha = 82^\circ 04'$ **52.a)** $t_1: x - 9 = 0$, $t_2: 3x + 4y - 35 = 0$, $t_3: y - 5 = 0$, $t_4: 4x - 3y - 45 = 0$ **b)** $t_1: x - 3 = 0$, $t_2: 4x - 3y + 15 = 0$, $t_3: x - 2y - 2 + 3\sqrt{5} = 0$, $t_4: x - 2y - 2 - 3\sqrt{5} = 0$ **c)** $t_1: x - 2y - 2 + 3\sqrt{5} = 0$, $t_2: x - 2y - 2 - 3\sqrt{5} = 0$. **53.** $k_1: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$, $k_2: (x - \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{5}{9})^2 = \frac{25}{81}$