17.
KOMPLEXNÍ ČÍSLA

- komplexní číslo a jeho zavedení (komplexní číslo jako uspořádaná dvojice reálných čísel), algebraický tvar komplexního čísla, reálná a imaginární část komplexního čísla, znázornění komplexního čísla v algebraickém tvaru v Gaussově rovině, imaginární číslo, reálné číslo a ryze imaginární číslo, početní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování), mocniny imaginární jednotky, číslo komplexně sdružené, číslo opačné, absolutní hodnota komplexního čísla a její znázornění v Gaussově rovině, komplexní jednotka, goniometrický tvar komplexního čísla, argument, převod komplexního čísla z algebraického tvaru na goniometrický tvar a naopak, znázornění komplexního čísla v goniometrickém tvaru v Gaussově rovině, početní operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru (násobení, dělení), Moivreova věta, Binomická rovnice, řešení rovnic v oboru komplexních čísel.

<u>příklady</u>:

ALGEBRAICKÝ TVAR, ABSOLUTNÍ HODNOTA

1. Určete, která z následujících komplexních čísel jsou imaginární a která ryze imaginární:

a) $2 - i$ b) i^2 c) $\left(2-\sqrt{2}\right)i$ d) -4 e) $3-i\sqrt{2}$ f) $-2^{-5}i$ g) i

h) 0 i) $-i$ j) $\cos\pi + i\sin\pi$ k) $\cos 2\pi + i\sin 2\pi$ l) 5π m) $1+i$

2. V Gaussově rovině zobrazte komplexní čísla: $a = -5 + 2i$, $b = 1 - 4i$, $c = 5 + 3i$, $d = i$, $e = -i$, $f = 1+i$, $g = -2 - 3i$, $h = i^2$.

3. Ke komplexním číslům a až h z příkladu 2 určete čísla komplexně sdružená.

4. Ke komplexním číslům a) až m) z příkladu 1 určete čísla komplexně sdružená.

5. Ke komplexním číslům a až h z příkladu 2 určete čísla opačná.

6. Dané komplexní číslo zapište jako uspořádanou dvojici reálných čísel a znázorněte je v Gaussově rovině:

a) $a = 3 - 3i$ b) $b = -2 + 4i$ c) $c = i - 5$ d) $d = \dfrac{2+3i}{4}$ e) $e = \dfrac{5}{2}i + \dfrac{1}{4}$ f) $f = 2$ g) $g = 2i$

7. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexního čísla a určete, zda je komplexní jednotkou:

a) $a = -4 + 3i$ b) $b = -\dfrac{5}{12} + \dfrac{11}{12}i$ c) $c = i$ d) $d = -6$ e) $e = (-2, 0)$ f) $f = 4i$ g) $g = (1, 1)$

8. Vypočtěte:

a) $(2+3i)^2 - 4(2-3i) + 13 =$ b) $(2+3i)(1+i) - (4+i)(1-3i) =$ c) $(1-2i)(2+i)^2 - 3(-3-2i) =$

d) $[(1+3i)-(2-i)]\cdot(i-2)^2 =$ e) $\left[3(2+i)^2 - 3i(2-i)^2\right] - 2(-4+i) =$ f) $3(i-1)(1+i) - i(3i-2) =$

9. Určete reálná čísla a, b tak, aby platilo:

a) $(-1-i)\cdot a - (-2+2i)\cdot b = 6-3i$ b) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\cdot a - \left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)\cdot b = i^2 - i^5$

c) $(b-2i)\sqrt{3} + a\cdot\left(\sqrt{3}-2i\right) = i\sqrt{3}$ d) $a(-1+i)(1-i) - b(2-3i) = 2-3i$

10*. Dokažte, že sčítání i násobení komplexních čísel je komutativní a asociativní.

11. Vypočtěte:

a) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} =$ b) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 =$ c*) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{50} =$

d) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot i^6 =$ e) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot \ldots \cdot i^{50} =$ f) $1 + i^4 + i^8 + i^{12} + \ldots + i^{52} =$

12. Rozhodněte, zda se rovnají komplexní čísla $z_1 = (2+3i)\cdot(1-i)$ a $z_2 = (1-5i)\cdot i$.

13. V algebraickém tvaru zapište komplexní číslo:

a) $z = (1-2i)\cdot(3+2i) + i(-2-i)$ b) $z = (-2-4i)\cdot 5i - 2i$ c) $z = -(3+3i)\cdot(-5-i) - 2\left[\dfrac{1}{2} - 2i\left(\dfrac{2}{3} + 3i\right)\right]$

14. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 5 + i$. Zapište v algebraickém tvaru:

a) $z_1 - z_2$ b) $1 - \left(z_1 + \overline{z_2}\right)$ c) $z_1\cdot\overline{z_2} - \overline{z_1}\cdot z_2$ d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

15. Určete převrácená čísla k číslům $-3 - 2i$, $i - 1$, i.

16. Vypočtěte a zapište v algebraickém tvaru čísla: a) $\dfrac{2+i}{1+2i} + \dfrac{3-2i}{2-i} =$ b) $\left(\dfrac{2}{i} + \dfrac{6}{1-i}\right) : (1+3i) =$

17*. Dokažte, že platí:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

18. V algebraickém tvaru zapište čísla:

a) $\frac{3+5i}{3-7i}$ b) $\frac{-2i}{5+2i}$ c) $\frac{2}{-1+i\sqrt{2}}$ d) $\frac{1-9i}{1+9i}$ e) $\frac{5+3i}{i}$ f) $\frac{4+2i}{2}$

19. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_3 = 1 + 3i$. Vyjádřete v algebraickém tvaru čísla:

a) k nim převrácená b) $z_1 + z_2$ c) $z_2 - z_3$ d) $z_1 z_2$ e) $z_2 z_3$ f) $\overline{z_1 z_2}$

20. Určete, která z následujících komplexních čísel jsou si rovna:

$z_1 = \frac{1}{2}(-1+5i)$, $z_2 = (2+3i):(1-i)$, $z_3 = (1+i)\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

21. Určete absolutní hodnotu čísel: $z_1 = 3 - i\sqrt{2}$, $z_2 = \frac{2-i}{i}$, $z_3 = \frac{-i}{1+i}$, $z_4 = i \cdot (-1+i)^2$, $z_5 = \frac{2i(3-i)}{1+i}$, $z_6 = i^{53}$

22. Určete vzdálenost obrazů komplexních čísel od počátku a určete zda je dané číslo komplexní jednotkou:

a) $z = \frac{3+2i}{2-3i}$ b) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $z = \frac{(1+2i)\sqrt{5}}{5i}$ d) $z = \frac{\sqrt{3}}{-1+i}$ e) $z = i \cdot \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{3-2\sqrt{2}}$

23. Vypočítejte a vyjádřete v algebraickém tvaru:

a) $(1+i)^{-2}$ b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-2} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2}$ d) $1 + \frac{1}{2i} - \frac{5}{i^7}$ e) $\frac{10}{5-4i} + \frac{5-4i}{10}$ f) $\pi - 1 + 2i + \frac{1}{-i}$

g) $(-3+2i)^3$ h) $(-3+2i)^{-3}$ i) $(-1-2i)^3$ j) $\left(\frac{1}{5} - 10i\right)^3$ k) $(-2-7i)^2$ l) $(4+i)^3$ m) $\left(-\frac{1}{2} + 3i\right)^{-2}$

24. Je dáno: $a = 4 - 3i$, $b = -2 - 2i$, $c = 3i$, $d = -3i + 2$. Vypočtěte:

a) $m = a + b + c + d$ b) $n = a - b - c - d$ c) $o = a - b + c - d$ d) $p = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} - \overline{d}$ e) $r = b - \overline{b}$

25. Je dáno: $a = -8 - i$. Určete početně i graficky:

a) $r = a + \overline{a}$ b) $s = a - \overline{a}$ c) $t = a + (-a)$

26. Je dáno: $a = -0{,}4 + 0{,}3i$, $b = 4 - 4i$, $c = -6 - 5i$, $d = i$. Určete početně:

a) $v = \overline{a} - b - \overline{c} - d$ b) $w = -a + \overline{b + c} - 2 \cdot d$ c) $z = a - \overline{a} + b - \overline{b} + c^{50}$ d) $u = -a + \overline{b} - c + d$

27. Je dáno: $a = 3 + 2i$, $b = 5 + 4i$, $c = -2 - 3i$, $d = -6$. Vypočtěte:

a) $z = a \cdot b$ b) $z = b^2$ c) $z = c \cdot \overline{c}$ d) $z = i^{52} + 2i^{105} - 3i^{27} + i^{41} \cdot d$ e) $z = (a \cdot d - \overline{b} \cdot c) \cdot (4 - 6i)$

28. Vypočtěte:

a) $(3+4i)(3-4i)$ b) $(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})$ c) $(-8-4i)(-8+4i)$ d) $(8-4i)(-8-4i)$ e) $(\sqrt{5}-4i)(\sqrt{5}+4i)$

29. Vypočtěte:

a) $3 \cdot (4-5i)$ b) $(5-2i)(-3i)$ c) $(-1-i)(2+i)$ d) $(-8+5i) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ e) $4i - 2i\left(2i - 6 \cdot \frac{2}{i}\right)$

30. Vypočtěte:

a) $-7i^7 + 12i^{12} - 4i^{86}$ b) $7i^{25} + 3i^{60} - 2i^{259}$ c) $\frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3}i^{30} - \frac{5}{6}i^{150} - \frac{1}{2}i^{33} + i$ d) $\frac{3}{4}i^{98} + \frac{7}{2}i^{51} - \frac{5}{4}i^{15}$

31. Vypočtěte:

a) $\frac{-3+2i}{6+5i}$ b) $\frac{5i-2}{2+i}$ c) $\frac{3i}{3+i}$ d) $\frac{6-2i}{-4-i}$ e) $\frac{4+i}{4-i}$ f) $\frac{1-3i}{2i}$ g) $\frac{-4-3i}{-6i}$

32. Určete absolutní hodnotu komplexních čísel z příkladu 31.

33. Určete reálná čísla x,y, pro která platí:

a) $\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}yi = 4 - 7i$ b) $\frac{2+3i^{29}}{1-2i^{67}} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}yi$ c) $6x - \frac{yi}{2} = 2 + i$ d) $5x - 3i = 1 + \frac{3yi}{5}$

e) $\frac{2}{5}x + i = -\frac{7}{5}yi$ f) $x - 3yi = (-4+i)^2$ g) $\frac{7-5i}{-2-4i} = 0{,}5x - 0{,}2yi$

h) $\frac{-4i}{i^8-3i^{233}}=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}yi$ i) $(2+3i^5)x+(1-i^{29})y=-10+5i$

34. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexního čísla a určete, zda je dané komplexní číslo komplexní jednotka:

a) $a=\frac{21+3i}{21-3i}$ b) $b=\frac{-5-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}$ c) $c=\frac{-2\sqrt{8}+0{,}5i}{-2\sqrt{8}-0{,}5i}$ d) $d=\frac{-15+2i}{15+2i}$

35. Vypočtěte:

a) $\left|\frac{2-4i}{-1+3i}\right|$ b) $|(8-3i)(2-i)+3i-6|$ c) $\frac{6-4i}{6+4i}-\frac{6+5i}{6-5i}$ d) $\left|\frac{i3\sqrt{5}}{2-i}\right|$ e) $\left|\frac{2+i}{2-i}:[(3+i)(3-i)]^{-1}\right|$

f) $[-3i^{11}-6(i^{66}+i^5)+5i^{100}+3i](6-5i)$ g) $\frac{6-2i}{1+i}-\left(\frac{2-3i}{2i}\right)^{-1}$ h) $\left|\frac{3(2+2i\sqrt{3})}{\frac{1}{3}(-1-i\sqrt{3})}\right|-\left(\frac{1}{2}+i\right)\left(i-\frac{1}{2}\right)-7i^{12}$

36*. Vypočtěte a k výsledku určete číslo komplexně sdružené:

a) $i^{96}\cdot\frac{1}{2}(2-i\sqrt{12})^2-(1+i\sqrt{3})^3$ b) $\frac{1+\frac{1}{4+i}}{\frac{1}{4+i}-i}-2i^{93}$ c) $\left(\frac{6-2i}{1+i}\right)^{-1}-\left(\frac{3-i}{2}\right)^{-2}$

37. Najděte reálná čísla x,y, která vyhovují rovnici: $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$

38. Nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla: a) $z=\frac{-5+3i}{9-i}$ b) $z=\frac{2+i^{13}}{1-i^5}$ c) $1+|i|+|-i|-|2i|$

39. Za jakých podmínek je součet dvou komplexních čísel $z_1=a_1+b_1i$ a $z_2=a_2+b_2i$ číslo:

a) reálné b) imaginární c) ryze imaginární

40. Za jakých podmínek je druhá mocnina komplexního čísla $z=a+bi$ číslem ryze imaginárním.

41. Určete komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu:

a) $z=\frac{4+3i}{6+5i}$ b) $z=\frac{65}{4-7i}$ c) $z=(2\sqrt{6}+5i)(2\sqrt{6}-5i)$ d) $z=5i+(-1+4i)+(9-i)+(1-i)^2$

42. Určete imaginární část komplexního čísla $z=\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2$. Je toto číslo ryze imaginární?

43. Jsou dána komplexní čísla: $z_1=3-4i$, $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$, $z_3=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$, $z_4=\frac{1}{2}-i$. Jsou některá z nich komplexními jednotkami?

44. Stanovte reálná čísla x tak, aby následující čísla byla komplexními jednotkami.

a) $4x+3xi$ b) $x+xi$ c) $\frac{2}{3}-xi$

45. Vypočítejte reálná čísla x,y tak, aby platilo:

a) $4x(2+i)+y(1-4i)+7=x(3+i)-6y(-1+2i)+9i$ b) $(4-i)^4=x-4yi+2$

c) $(2+i)^2(-1+i)=x-2yi$ d) $\frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^3+1}=x-4yi-1$

46. Vypočítejte:

a) $(2+i+3i^2-i^3-i^4+5i^5)\cdot(i-i^2+3i^3-5i^4)$ b) $(2-i^2)\cdot(1+i^3)\cdot(3+4i^5)-(2+i^2\cdot\sqrt{2})\cdot(2-i^2\cdot\sqrt{2})(3-2i^6)$

47. Najděte číslo komplexně sdružené k číslu $z=2i-3i(1+2i)^2-4(2-4i)$

48. Určete absolutní hodnotu komplexního čísla: $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

49. Vypočtěte: a) $i^6-i^8+\frac{i^5}{2i^4+i^3}$ b) $\frac{i^5-1}{i^{10}-1}$ c) $\frac{(1-i)^2(\sqrt{3}+i)}{1-i\sqrt{3}}$ d) $\frac{15-5i}{1+2i}-\frac{1-3i}{i}+(3+i)(-1+2i)$

50. Vypočtěte:

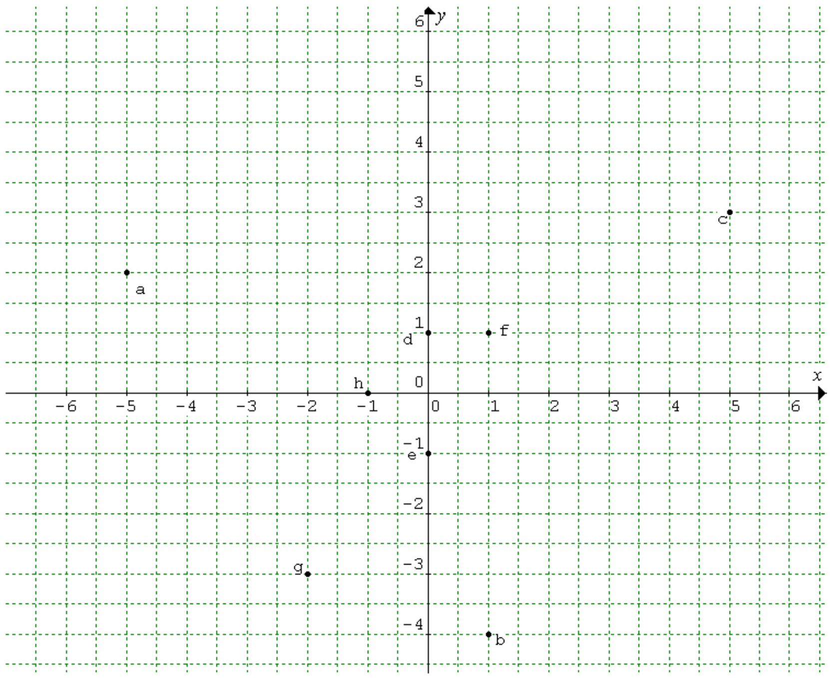
a) $a = (-2+3i)^2 \cdot i^5 + \dfrac{13-26i}{3+2i} - (1-i)(1+i)$ b) $b = \dfrac{20-3i}{1-3i} - i^3(2-i) + (-3+2i)^2$

c) $c = (3+2i) - (-1+3i)^2 + \dfrac{26+13i}{2+3i}$ d) $d = (-3+2i)\cdot i^3 - \dfrac{10-2i}{-3+i} + (-1-1)^2$

Řešení:

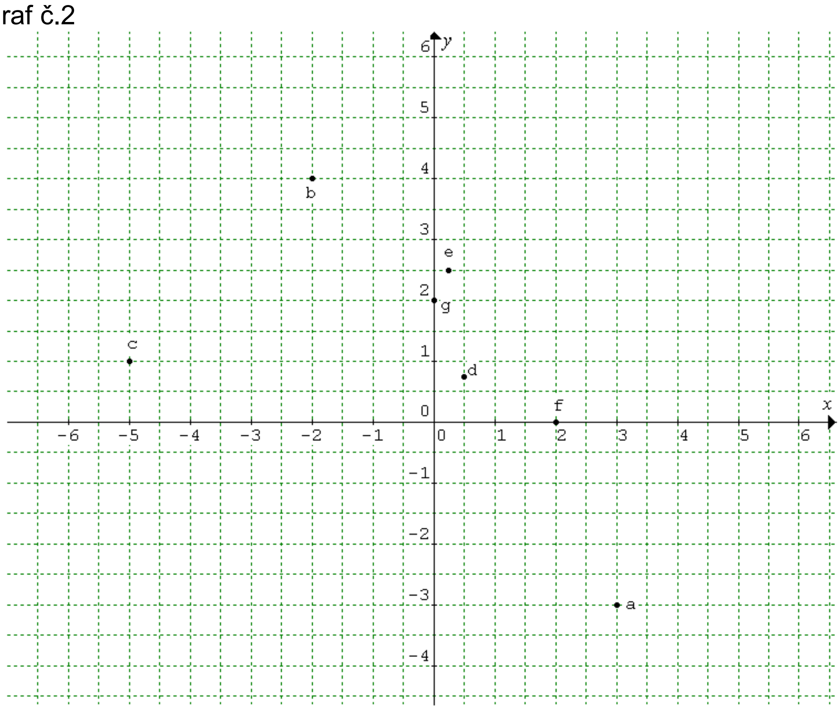
1. imaginární: a) c) e) f) g) i) m); ryze imaginární: c) f) g) i) ; platí: $i^2 = -1$; $-2^{-5}i = -\dfrac{1}{2^5}i$; $\cos\pi + i\sin\pi = -1$; $\cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ **2.** viz. graf č.1 **3.** $\bar{a} = -5-2i$, $\bar{b} = 1+4i$, $\bar{c} = 5-3i$, $\bar{d} = -i$, $\bar{e} = i$, $\bar{f} = 1-i$, $\bar{g} = -2+3i$, $\bar{h} = -1$

graf č.1



4. a) 2 + i b) –1 c) $(\sqrt{2}-2)\cdot i$ d) – 4 e) $3+i\sqrt{2}$ f) $2^{-5}i$ g) – i h) 0 i) i j) – 1 k) 1 l) 5π m) 1 – i **5.** –a = 5 – 2i, - b = -1 +4i, - c = -5 – 3i , - d = -i, - e = i, - f = -1 – i, - g = 2 + 3i, - h = 1 **6.** a) a = [3, -3], b) b = [-2, 4] c) c = [-5,1] d) $d = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right]$ e) $e = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{2}\right]$ f) f =[2,0] g) g =[0,2] viz. graf.č.2

graf č.2



7. a) 5 b) $\frac{\sqrt{146}}{12}$ c) 1 d) 6 e) 2 f) 4 g) $\sqrt{2}$ komplexní jednotkou je pouze číslo i. **8.** a) 24i b) –8 + 16i c) 20 + 4i d) 13 + 16i e) 5+i f) –3 + 2i **9.** a) $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{4}$ b) $a = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) $a = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$, $b = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$ d) a = -3, b = 1 **10.** komutativnost komplexních čísel znamená: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, asociativnost komplexních čísel znamená: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $z_1\cdot(z_2\cdot z_3) = (z_1\cdot z_2)\cdot z_3$. Důkazy provedeme dosazením komplexních čísel $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ do všech rovností. Poté dokážeme, že komplexní čísla na pravé i levé straně rovnice se rovnají (tj. musí se rovnat jejich imaginární i jejich reálné složky). **11.** a) 1 b) –1 c) i – 1 d) i e) – i f) 14

12. ano, $z_1 = z_2$ **13.** a) z = 8 – 6i b) z = 20 – 12i c) $z = -1 + \frac{62}{3}i$ **14.** a) –3 – 4i b) –6 + 4i c) – 34 i d) $\frac{7}{26} - \frac{17}{26}i$

15. $\frac{1}{-3-2i} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$, $\frac{1}{i-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{1}{i} = -i$ **16.** a) $-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ b) 0,6 – 0,8i **17.** Důkazy provedeme dosazením komplexních čísel $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ do všech rovností, poté dokážeme, že komplexní čísla na pravé i levé straně rovnice se rovnají (tj. musí se rovnat jejich imaginární i jejich reálné složky). **18.** a) $-\frac{13}{29} + \frac{18}{29}i$ b) $-\frac{4}{29} - \frac{10}{29}i$

c) $-\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}i$ d) $-\frac{40}{41} - \frac{9}{41}i$ e) 3 – 5i f) 2 + i (jedná se zde o běžné dělení reálným číslem) **19.** a) $\frac{1}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}i$,

$\frac{1}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}i$, $\frac{1}{1+3i} = 0{,}1 - 0{,}3i$ b) 5 c) $1 + \left(\sqrt{3} - 3\right)\cdot i$ d) $9 + i\sqrt{3}$ e) $2 - 3\sqrt{3} + \left(6 + \sqrt{3}\right)\cdot i$ f) $9 - i\sqrt{3}$

20. $z_1 = z_2 = z_3$ **21.** $|z_1| = \sqrt{11}$, $|z_2| = \sqrt{3}$, $|z_3| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|z_4| = 2$, $|z_5| = 2\sqrt{5}$, $|z_6| = 1$ **22.** absolutní hodnota všech čísel a) až e) je rovna 1, všechna uvedená komplexní čísla jsou komplexními jednotkami. **23.** a) –0,5i b) –i c) –2i d) 1 – 5,5i

e) $\frac{141}{82} + \frac{118}{205}i$ f) $\pi - 1 + 3i$ g) 9 + 46i h) $\frac{9}{2197} - \frac{46}{2197}i$ i) 11 + 2i j) –59,992 + 998,8i k) –45 + 28i l) 52 + 47i m) –8,75 – 3i **24.** a) m = 4 – 5i b) n = 4 – i c) o = 4 + 5i d) p = –i e) z = -4i **25.** a) r = -16 b) s = -2i c) t = 0
26. a) v = 1,6 – 2,3i b) w = -1,6 + 6,7i c) z = -1 – 7,4i d) u = 10,4 + 9,7i **27.** a) 7 + 22i b) 9 + 40i c) 13 d) 1- i e) –14 – 44i **28.** a) 25 b) 3 c) 80 d) –80 e) 21 **29.** a) 12 – 15i b) –6 – 15i c) –1 – 3i d) 4 – 2,5i e) 28 + 4i

30. a) 16 + 7i b) 3 + 9i c) 0,5i d) – 0, 75 – 2,25i **31.** a) $-\frac{8}{61} + \frac{27}{61}i$ b) 0,2 + 2,4i c) 0,3 + 0,9i d) $-\frac{22}{17} + \frac{14}{17}i$

e) $\frac{15}{17} + \frac{8}{17}i$ f) –1,5 – 0,5i g) $0{,}5 - \frac{2}{3}i$ **32.** a) $\sqrt{\frac{13}{61}}$ b) $\sqrt{\frac{29}{5}}$ c) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ d) $\sqrt{\frac{40}{17}}$ e) 1 f) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ g) $\frac{5}{6}$ **33.** a) x = 3, y = -14

b) $x = \frac{16}{15}$, $y = -\frac{3}{10}$ c) $x = \frac{1}{3}$, y = - 2 d) $x = \frac{1}{5}$, y = -5 e) x = 0, $y = -\frac{5}{7}$ f) x = 15, $y = -\frac{8}{3}$ g) x = 0,6 ; y = -9,5 h) x = - 0,9 ; y = 0,8 i) x = -1, y = -8 **34.** absolutní hodnota všech čísel a) až d) je rovna 1, všechna uvedená komplexní čísla jsou komplexními jednotkami. **35.** a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{170}$ c) $\frac{162}{793} - \frac{1512}{793}i$ d) 3 e) 10 f) 66 – 55i g) $\frac{32}{13} - \frac{56}{13}i$ h) 12,25

36. a) $-14 - 4i\sqrt{3}$, č. komplexně sdružené: $-14 + 4i\sqrt{3}$ b) 0,3 - 0,9i ; č. komplexně sdružené: 0,3 + 0,9i

c) – 0,22 – 0,04i ; č. komplexně sdružené číslo: - 0,22 + 0,04i **37.** $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$ **38.** a) reálná část (a) = $-\frac{24}{41}$, imaginární část (b) = $\frac{11}{41}$ b) a = 0,5 ; b = 1,5 c) a = 1, b = 0 **39.** a) $b_1 = b_2$ b) $b_1 \neq -b_2$ c) $a_1 = -a_2$, $b_1 \neq -b_2$

40. $a = \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ **41.** a) $\frac{39}{61} + \frac{2}{61}i$ b) 4 – 7i c) 49 d) 8 – 6i **42.** imaginární část: 0,5 ; číslo je ryze imaginární

43. $|z_1| = 5$, $|z_2| = \sqrt{5}$, $|z_3| = 1$, $|z_4| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, komplexní jednotkou je číslo z_3 **44.** a) $x = \pm 0,2$ b) $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) nemá řešení

45. a) x = - 0,2 ; y = 1,2 b) x = 158, y = 60 c) x = -7 , y = 0,5 d) x = 0,8 ; y = - 0,4 **46.** a) 22 – 24i b) 11 + 3i

47. 4 – 27i **48.** z = 1+i , $|z| = \sqrt{2}$ **49.** a) – 2,2 + 0,4i b) 0,5 – 0,5i c) 2 d) –1 – i **50.** a) a = 9 – 13i b) b = -8,9 – 4,3i c) c = 18 + 4i d) d = 9,2 + 3,4i

---

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

1. Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla:

a) $a = 3\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ b) $b = -2\cdot(\cos\pi + \sin\pi)$ c) $c = 4\cdot\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

d) $d = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ e) $e = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$ f) $f = 2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

2. Převeďte daná komplexní čísla na goniometrický tvar:

a) a = 2 + i b) b = i c) c = –i d) d = 1+i e) e = –1+i f) f = 3 - 2i g) $g = \frac{1}{2} + 4i$

h) $h = \cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2}$ i) $z = 2\cdot\left(\cos\frac{9}{2}\pi - i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ j) $j = \frac{3+4i}{5}$ k) $k = \frac{-7-5i}{4}$ l) l = - 4i

3. Převeďte daná komplexní čísla na goniometrický tvar:

a) $z = 3 + 3i$ b) $z = \frac{2-i}{1+2i}$ c) $z = \frac{i^{14}-1}{i^9+1}$ d) $z = \frac{(2-3i)^2}{-4+i}$ e) $z = \frac{-2}{1+i}$ f) $z = -1 + i\sqrt{2}$ g) $z = 1 + i\sqrt{3}$

h) $z = \sqrt{2}$ i) $z = (2-\pi)\cdot i$ j) $z = \pi + 3$ k) $z = -i\cdot\sqrt{3}$ l) $z = (3-3i)\cdot(1+i)$ m) $z = (-2+i)^2$

4. V Gaussově rovině znázorněte daná komplexní čísla pomocí jejich argumentu a vzdálenosti od počátku:

a) $z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ b) $z_2 = 3\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ c) $z_3 = 5\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d) $z_4 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ e) $z_5 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi$ f) $z_6 = \frac{1}{2}\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$

5. V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $1 + \cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi$ b*) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ c) $\sin\frac{5\pi}{4} + i\cos\frac{5\pi}{4}$ d*) $\sin\alpha + i\cos\alpha$

6. V algebraickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $2\cdot\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ b) $\frac{1}{3}\cdot(\cos 240\pi + i\sin 240\pi)$ c) $0,4\cdot(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$

d) $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$ e) $\sqrt{2}\cdot(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$ f) $\frac{1+3\sqrt{3}}{5}\cdot\left(\cos\frac{12}{3}\pi + i\sin\frac{12}{3}\pi\right)$

7. Zapište komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

a) $a = -\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6}i$ b) $b = 6 - 6i\sqrt{2}$ c) $c = 0,8 - 0,8\cdot i\sqrt{2}$ d) $d = 4 - 5i$ e) $e = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Určete všechny amplitudy komplexního čísla:

a) $z = \frac{5+5i}{5-5i}$ b) $z = 1 - i\sqrt{3}$ c) $z = \frac{i+2}{i-3} + \frac{i-1}{1+i}$ d) $d = 4(i-2)^2 + 3$ e) $e = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ f) $f = i\sqrt{3}$

9. Dané číslo z vyjádřete v goniometrickém tvaru:

a) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ b) $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i$ c) $z = \frac{2-3i}{3-2i}$ d) $z = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot i$

e) $z = \left(i + \frac{1}{1+i}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{1-i} - i\right)^{-1}$ f) $z = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^3 - \frac{-4+6i}{2-3i}$ g) $z = \left[(-1-3i) - \left(-2 + \frac{i}{2}\right)\right] \cdot \left[(2-i) - (1-2i)\right]$

h) $z = \frac{8i - 7i^2 + 6i^3 - 5i^4 + 4i^5 - 3i^6 + 2i^7 - i^8}{12i^{15}}$ i) $z = \frac{(1 - 3i + 3i^2 - i^3) - (9 + 6i + i^2) - (4 - i^2)}{2 + 5i - 12i^2}$

10. Jsou dána komplexní čísla z_1 a z_2. Vypočítejte bez převodu na algebraický tvar $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$ a výsledek vyjádřete v goniometrickém i v algebraickém tvaru:

a) $z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$, $z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$ b) $z_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

c) $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$, $z_2 = \frac{\sin\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}}$ d) $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

e) $z_1 = 7(\cos 150^\circ 12' + i\sin 150^\circ 12')$ $z_2 = 14(\cos 29^\circ 48' + i\sin 29^\circ 48')$

f) $z_1 = \cos 945^\circ + i\sin 945^\circ$ $z_2 = \cos 675^\circ + i\sin 675^\circ$

g) $z_1 = 7\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$

h) $z_1 = 8\left(\cos\frac{17}{6}\pi + i\sin\frac{17}{6}\pi\right)$ $z_2 = 2(\cos 1320^\circ + i\sin 1320^\circ)$

i) $z_1 = \frac{3}{5}(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$ $z_2 = 6(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

11. Vypočítejte bez převádění na algebraický tvar:

a) $z = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$ b) $z = \frac{2-2i}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)}$ c) $z = \frac{i}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

d) $z = \frac{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}{-2i}$ e) $z = \left(\cos\frac{7}{3}\pi + i\sin\frac{7}{3}\pi\right) \cdot \left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

12. V goniometrickém tvaru zapište komplexní čísla:

a) $z = 3$ b) $z = \frac{i}{\sin\alpha + i\cos\alpha}$ c) $z = \frac{\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ d) $z = \frac{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}{1-i} \cdot \frac{1+i}{\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi}$

e) $z = 2i\sin\frac{3}{4}\pi \cdot \left(\cos\frac{7}{3}\pi + i\sin\frac{7}{3}\pi\right) \cdot \left(\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)\right)$ f) $z = \left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right) \cdot i$

13. V goniometrickém tvaru zapište komplexní čísla:

a) $z = \frac{(2+i)^2}{1-i} \cdot i$ b) $z = (1-i)^2 - (1+i)^2$ c) $z = \frac{3+4i}{2-3i} - \left[(1-3i) \cdot (2-i)^2\right]^2$ d) $z = \cos^2\frac{\pi}{4} + i\sin^2\frac{\pi}{4}$

14. Určete argument α tak, aby platila rovnost:

a) $\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = i$ b) $\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = -1$

c) $\frac{\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = 1$ d) $\frac{\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = -i$

15. Vypočítejte $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}z + z^2\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}z - z^2\right)$, je-li $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ (využijte vzorec $a^2 - b^2$).

16. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte mocninu daného čísla z a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

a) z^5, $z = 1+i$ b) z^4, $z = 2 + i\sqrt{2}$ c) z^{10}, $z = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ d) z^8, $z = \cos 315^\circ + i\sin 315^\circ$

e) z^9, $z = \sqrt{\frac{3}{36}} + \frac{1}{6}i$ f) z^{20}, $z = 4(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$ g) z^{13}, $z = i$ h) z^6, $z = -2 - 2i$

17. Vypočítejte a výsledek vyjádřete v algebraickém tvaru:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-4}$ b) $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}$ c) $4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{4}$ d) $\left(\cos\frac{1}{10}\pi + i\sin\frac{1}{10}\pi\right)^{20}$

e) $\left[-\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\right]^3$ f) $[2(\cos 390^\circ + i\sin 390^\circ)]^9$ g) $\left[\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\right)^4\right]^5$

18. Vypočítejte pomocí Moivreovy věty:

a) $\left(\sqrt{2} - i\right)^8$ b) $\left(\frac{1-i}{i+1}\right)^{24}$ c) $(-1+i)^{66} - i(1+i)^{80}$ d) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12}$ e) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-8}$

f) $\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{-6}$ g) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{-31}$ h) $(1+i)^2$ i) $(1+i)^8$ j) $(1-i)^{17}$ k) $(2+2i)^{-15}$

19. Vypočítejte pomocí Moivreovy věty:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{60} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}$ b) $\left(\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{30}$ c) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6 : \left(1-i\sqrt{2}\right)^{18}$

20. Určete argument komplexního čísla z^{11}, je-li: a) $z = 1 + 2i$ b) $z = \frac{2+i^{13}}{1-i^5}$ c) $z = 1+i\sqrt{3}$ d) $z = -1 + i$

21. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla z^5, je-li: a) $z = 3 + 3i$ b) $z = -1 - i$ c) $z = 4\sqrt{3} + 4i$

22. Vypočítejte všechna komplexní čísla $z = a + bi$ (kde a je reálná a b imaginární část komplexního čísla z), pro která platí: a) $|z| = 1$, $\sqrt{3}\cdot|a| = |b|$ b) $|z| = 2$, $|a| = |b|$. Vyjádřete je v goniometrickém tvaru.

23. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla:

a) $(2+2i)^{30}$ b) $(-1+i)^{34}$ c) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{30}$ d) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{27}$ e) $(1-i)^{32}$

24. Je dáno komplexní číslo: $a = -\frac{i-1}{2} - \frac{i}{i-1}\cdot i - 1$. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte a^5.

25. Určete komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu $z = (1+i)^7$

26. Jsou dána komplexní čísla $u = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $v = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$. Vypočtěte: $u\cdot v$, u^3, v^8, $\frac{u}{v}$, $\frac{v}{u}$

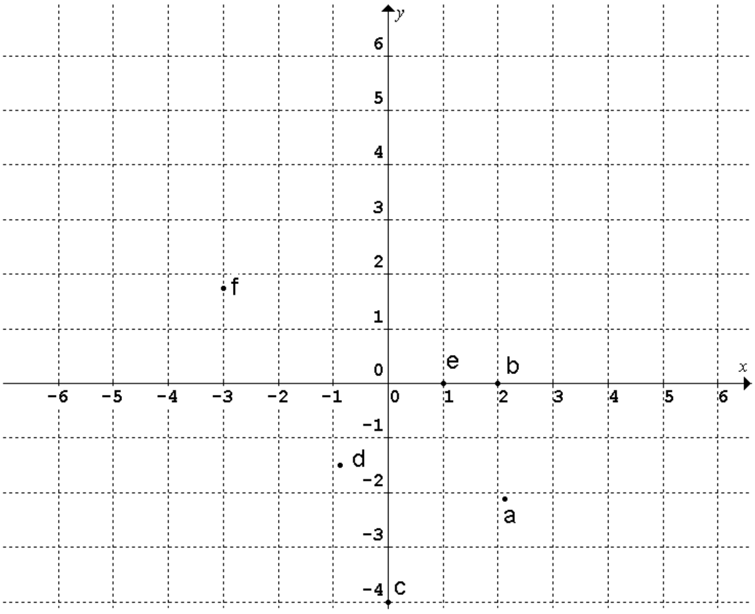
27. Jsou dána komplexní čísla $u = 2 + i$, $w = -2i$, $v = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Pro výpočet užijte algebraický tvar komplexního čísla: a) $u\cdot w + \overline{v}$ b) $u + v + w$ c) $\frac{u}{v}$ d) $u\cdot w^3$ e) $(uw)^2 - \overline{wu}$ f) $\frac{u}{2w} + \frac{v}{\overline{w}}$ g) $u^3 + v\cdot w$

28. Jsou dána komplexní čísla $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $s = 1+i\sqrt{3}$. Vypočtěte v goniometrickém tvaru:

a) zs b) $\frac{z}{s}$ c) z^3 d) s^4 e) $\frac{z^2}{s^3}$ f) $\frac{2s}{z}$

Řešení:

1. a) $a = \frac{3}{2}\sqrt{2} - i\frac{3}{2}\sqrt{2}$ b) $b = 2$ c) $c = -4i$ d) $d = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$ e) $e = 1$ f) $f = -3 + i\sqrt{3}$



2. a) $a = \sqrt{5}\left(\cos 26^\circ 34' + i\sin 26^\circ 34'\right)$ b) $b = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ c) $c = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$ d) $d = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

e) $e = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ f) $f = \sqrt{13}\left(\cos 326^\circ 19' + i\sin 326^\circ 19'\right)$ g) $g = \frac{\sqrt{65}}{2}\left(\cos 82^\circ 52' + i\sin 82^\circ 52'\right)$

h) $h = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ i) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ j) $j = \cos 53^\circ 08' + i\sin 53^\circ 08'$

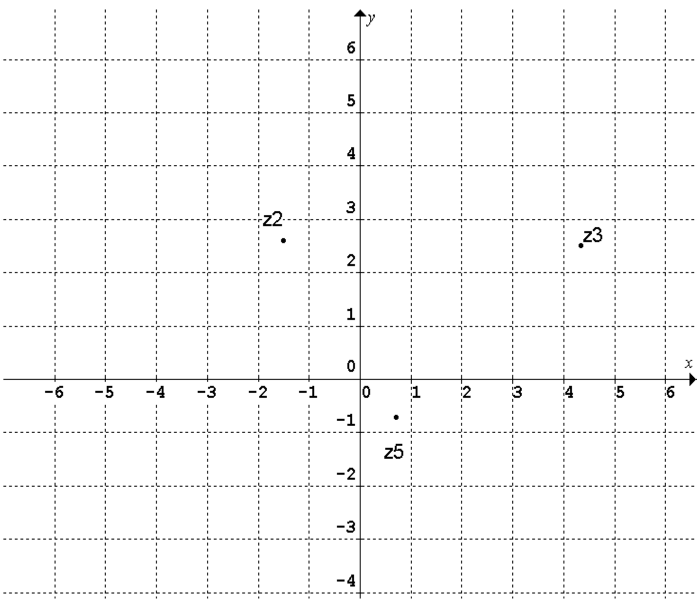
k) $k = \frac{\sqrt{74}}{4}\left(\cos 215^\circ 32' + i\sin 215^\circ 32'\right)$ l) $l = 4\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ **3.** a) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

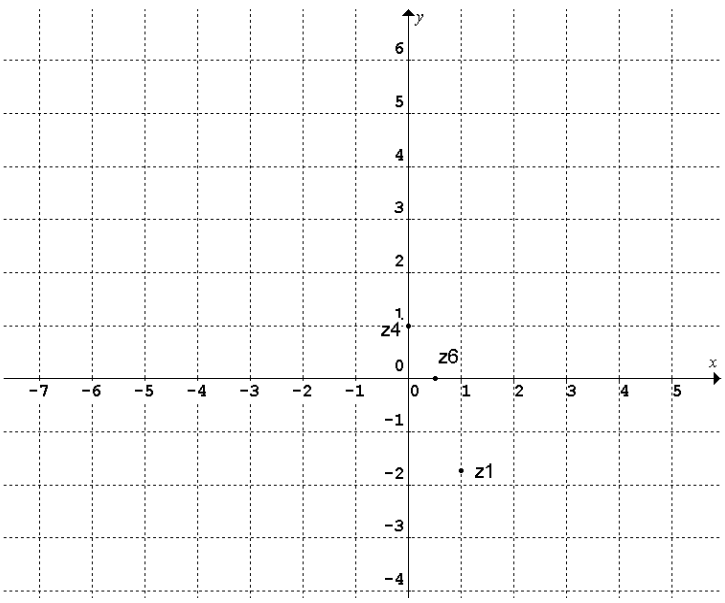
b) $z = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$ c) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ d) $z = \frac{13}{17}\cdot\sqrt{17}\left(\cos 81^\circ 25' + i\sin 81^\circ 25'\right)$

e) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ f) $z = \sqrt{3}\left(\cos 125^\circ 15' + i\sin 125^\circ 15'\right)$ g) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ h) $z = \sqrt{2}\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

i) $z = (2 - \pi)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ j) $z = (\pi + 3)\cdot\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$ k) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ l) $z = 6\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

m) $z = 5\left(\cos 306^\circ 52' + i\sin 306^\circ 52'\right)$ **4.** a) $|z_1| = 2$, $\alpha = 300^\circ$ b) $|z_2| = 3$, $\alpha = 120^\circ$ c) $|z_3| = 5$, $\alpha = 30^\circ$ d) $|z_4| = 1$, $\alpha = 90^\circ$ e) $|z_5| = 1$, $\alpha = 315^\circ$ f) $|z_6| = 0{,}5$; $\alpha = 0^\circ$





5. a) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}\left(\cos 22^\circ 30' + i\sin 22^\circ 30'\right)$ b) využijeme vzorečku: $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$, $1 + \cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$, goniometrický tvar: $z = 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ c) $z = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi$ d) využijeme vzorečku:

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **6.** a) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5}$

d) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $i\sqrt{2}$ f) $\frac{1+3\sqrt{3}}{5}$ **7.** a) $a = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ b) $b = 6\sqrt{3}(\cos 305^\circ 15' + i\sin 305^\circ 15')$

c) $c = 0{,}8\cdot\sqrt{3}(\cos 305^\circ 15' + i\sin 305^\circ 15')$ d) $d = \sqrt{41}(\cos 308^\circ 40' + i\sin 308^\circ 40')$ e) $e = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

8. a) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\alpha = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ c) $\alpha = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ d) $\alpha = 313^\circ 09' + k\cdot 360^\circ$ e) $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

f) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **9.** a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ b) $z = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ c) $z = \cos 337^\circ 23' + i\sin 337^\circ 23'$

d) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ e) $z = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ f) $z = 10(\cos 0 + i\sin 0)$ g) $z = \sqrt{26{,}5}(\cos 330^\circ 57' + i\sin 330^\circ 57')$

h) $z = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ i) $z = \frac{17\sqrt{314}}{314}(\cos 191^\circ 40' + i\sin 191^\circ 40')$ **10.** a) $z_1\cdot z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $z_1\cdot z_2 = 32(\cos 37^\circ 30' + i\sin 37^\circ 30') = 25{,}4 + 19{,}5i$; $\frac{z_1}{z_2} =$
$2(\cos 7^\circ 30' + i\sin 7^\circ 30') = 1{,}98 + 0{,}26i$ c) nejprve musíme z_2 převést na goniometrický tvar, $z_1\cdot z_2 =$
$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $z_1\cdot z_2 = 2(\cos 126^\circ + i\sin 126^\circ) =$
$-1{,}18 + 1{,}62i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}(\cos 54^\circ + i\sin 54^\circ) = 0{,}29 + 0{,}4i$ e) $z_1\cdot z_2 = 98(\cos\pi + i\sin\pi) = -98$; $\frac{z_1}{z_2} =$
$\frac{1}{2}(\cos 120^\circ 24' + i\sin 120^\circ 24') = -0{,}253 + 0{,}431i$ f) $z_1\cdot z_2 = \cos 1620^\circ + i\sin 1620^\circ = -1$, $\frac{z_1}{z_2} = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ$ g)
$z_1\cdot z_2 = 3{,}5(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = -\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$; $\frac{z_1}{z_2} = 14(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = 7 - 7i\sqrt{3}$
h) $z_1\cdot z_2 = 16(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 8\sqrt{3} + 8i$, $\frac{z_1}{z_2} = 4(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) = -4i$ i) $z_1\cdot z_2 = \frac{18}{5}(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) =$
$-\frac{18}{5}i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{10}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{1}{20}i$ **11.** a) $z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ b) $z = -0{,}43 - 4{,}9i$ c) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
d) $z = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ e) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **12.** a) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$ b) $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ c) $z = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi$
d) $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ e) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ f) $z = \cos\frac{9}{10}\pi + i\sin\frac{9}{10}\pi$ **13.** a) $z = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\cos 188^\circ 08' + i\sin 188^\circ 08')$
b) $z = 4\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ c) $z = \frac{\sqrt{10445669}}{13}(\cos 290^\circ 37' + i\sin 290^\circ 37')$ d) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
14. a) $\alpha = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ b) $\alpha = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ c) $\alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ d) $\alpha = \frac{5}{8}\pi + 2k\pi$ **15.** $1 + \frac{1}{2}i$ **16.** a) $-4 - 4i$ b) $-28 + 22{,}6i$
c) $-\frac{1}{32}i$ d) 1 e) $-\frac{1}{19683}i$ f) $2^{39}(-1 - i\sqrt{3})$ g) i h) $-2^9 i$ **17.** a) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) 3 c) $4i$ d) 1 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
f) $-2^9 i$ g) $-\frac{1}{32}$ **18.** a) $17 + 79{,}2i$ b) 1 c) $-129\cdot 2^{33}i$ d) 729 e) $-\frac{1}{2^9} + i\frac{\sqrt{3}}{2^9}$ f) $-\frac{1}{64}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ h) $2i$ i) 16
j) $2^8 - 2^8 i$ k) $\frac{1}{2^{23}}(1 + i)$ **19.** a) 2 b) 0 c) $-0{,}00026 - 0{,}0033i$ **20.** a) $\alpha = 697^\circ 57'$ b) $\alpha = 787^\circ 14'$ c) $\alpha = \frac{11}{3}\pi$
d) $\alpha = \frac{33}{4}\pi$ (argumenty komplexního čísla jsou i výše zmíněné úhly v základním tvaru) **21.** a) a = -972, b = -972

b) $a = 4, b = 4$ c) $a = -4^7\sqrt{3}$, $b = 4^7$ **22.** a) $z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$, $z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$ $z_3 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $z_4 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi$ b) $z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$, $z_3 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$, $z_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ **23.** a) $a = 0$, $b = -2^{45}$ b) $a = 0$, $b = -2^{17}$ c) $a = -2^{30}$, $b = 0$ d) $a = 2^{16}$, $b = 0$ **24.** $4 + 4i$ **25.** $8 + 8i$

26. $u\cdot v = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right) = -3{,}346 + 0{,}8965i$; $u^3 = 8i$, $v^8 = 81$, $\frac{u}{v} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos 255^\circ + i\sin 255^\circ\right) = -0{,}224 + 0{,}84i$ **27.** a) $3-\left(4+\sqrt{3}\right)i$ b) $3-i\left(1-\sqrt{3}\right)$ c) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{\left(1-2\sqrt{3}\right)\cdot i}{4}$ d) $16i - 8$ e) $-14 - 20i$ f) $\frac{-1+2\sqrt{3}}{4}$ g) $2+2\sqrt{3}+9i$ **28.** a) $2\sqrt{2}\left(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ\right)$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 345^\circ + i\sin 345^\circ\right)$ c) $2\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\right)$ d) $16\left(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right)$ e) $\frac{1}{4}\left(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ\right)$ f) $\sqrt{2}\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)$

ROVNICE V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

1. Pro která reálná čísla x, y platí rovnost:

a) $(1+3i)\cdot x + (2-5i)\cdot y = 2-3i$ b) $(2+i)\cdot x + (-2+i)\cdot y = 4+6i$

c) $(3-i)\cdot x + (2-2i)\cdot y = -5-7i$ d) $(i-1)\cdot x + (2+3i)\cdot y = 1+2i$

e) $(1-i)\cdot x - y\cdot\left(-1\frac{1}{3}+4\frac{5}{6}i\right) = 13\frac{1}{12}+22\frac{7}{8}i$ f) $x\cdot i - y\cdot(-12-7i) - 170 + 96i = 0$

g) $2x\cdot(3+i) + y\cdot(1-5i) + 3 = x\cdot(3+i) - 6y\cdot(2i-1) + 9i^5$ h) $x\cdot(13-i) + y\cdot(15+i) = 0$

2. V množině všech komplexních čísel řešte kvadratickou rovnici a řešení uveďte v algebraickém i goniometrickém tvaru:

a) $x^2 + 6x + 6 = 0$ b) $x^2 - 3x + 3 = 0$ c) $x^2 - 3x + 9 = 0$ d) $x^2 + 2x + 4 = 0$

e) $x^2 - 8x + 16 = 0$ f) $x^2 + 4x + 16 = 0$ g) $5x^2 + 12x + 9 = 0$ h) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

3. V oboru komplexních čísel řešte rovnice: a) $-4x^2 - 6 = 0$ b) $\frac{x-2}{x+5}+\frac{x+1}{x-1} = 0$

4. Řešte v oboru komplexních čísel:

a) $4x^2 + 8ix - 4 = 0$ b) $x^2 - 6ix - 16 = 0$ c) $2x^2 + 2(1 - i)x + 1 - 2i = 0$

5. Určete, kolik má rovnice $-\left(\bar{z}\right)^2 = z$ v komplexním oboru řešení? (použijte vyjádření $z = a + bi$)

6. Stanovte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je $x_1 = 5 - 2i$.

7. Řešte rovnice v množině **C**:

a) $(-4+4i)\cdot(4-3i) + (x+iy) = (2+2x) + (28+y)\cdot i$ b) $(3-3i+5-2i)\cdot(x+iy) = 6+3i$

c) $[(3-2i)\cdot(2-6i)] + x + iy = 3+6i$ d) $(x+y)\cdot(5-4i) + (x-2y)\cdot(4-5i) = 94-68i$

e) $\frac{3-2i}{1-i}\cdot(1+i) = 2x+yi$

8. Řešte rovnici v oboru komplexních číslech s neznámou z:

a) $(1-i)\cdot z = i\cdot(z+2)$ b) $(1+i)\cdot z + (2-3i)\cdot\bar{z} = i$ c) $16\cdot(z-i) = (2-i)^2$

d) $(1-2i)\cdot z = (1+2i)\cdot\bar{z}$ e) $z + \bar{z}\cdot(2+i) = z\cdot\bar{z}$ f) $\frac{1-i}{i}z = (1+i)\cdot\left(\bar{z}+1\right)$

g) $(2+i)\cdot\left(z+\bar{z}\right) = (2-i)\cdot\left(z-\bar{z}\right)$ h) $(z-2)\cdot\left(\overline{z-1}\right) = (z+3)\cdot\left(\overline{z+1}\right)$ i) $z + 2\bar{z} + 3i + 1 = 0$

9. Zapište alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny v množině **C** jsou:

a) $x_1 = -2 - i\sqrt{3},\ x_2 = -2 + i\sqrt{3}$ b) $x_1 = \frac{1}{5} - i,\ x_2 = \frac{1}{5} + i$ c) $x_1 = 1 - i,\ x_2 = (1-i)^2$

d) $x_1 = -1 - 2i,\ \ x_2 = 1 - 2i$ e) $x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{4}\pi + i\sin\frac{13}{4}\pi\right),\ x_2 = 2 - 2i$ d) $x_1 = x_2 = 1 + i$

10. V množině **C** řešte rovnice s neznámou x:

a) $(x^2+4x+7)\cdot(x^2+4x+6)\cdot(x^2+4x+5) = 0$ b) $(x^2+4x-3)\cdot(x^2+4x-4) = 0$

c) $\frac{x+4}{x+3} - 1 - \frac{x+2}{x+1} = 0$ d) $3\cdot\frac{x+1}{x-2} - 2\cdot\frac{x+3}{x+2} = 0$

11. V množině **C** řešte rovnice s neznámou z:

a) $z^2 - 6iz - 12 = 0$ b) $z^2 - 2(1+2i)z + 2i = 0$ c) $z^2 - 2z + 5 - 2i = 0$

d) $z^2 - (3-i)z + 7 - 6i = 0$ e) $\frac{z-1}{z+i} = \frac{1+z}{z}$ f) $z^2 - 4i\sqrt{3}\,z - 9 = 0$

12. V množině komplexních čísel řešte soustavu rovnic s neznámými u, v, kde u, v jsou komplexní čísla:

a) $\begin{aligned} iu + (1-2i)v &= 1 \\ (1+i)u + 2v &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2u - 3v &= 4 + 2i \\ (2-i)u + (2+i)v &= 2 - 2i \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} i(u+v) &= 1 \\ u^2 + v^2 &= -1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} i(u+v) &= 1 \\ u^2 + v^2 &= 1 \end{aligned}$

13. Napište alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou

a) $x_1 = -7 - i,\ x_2 = -7 + i$ b) $x_{1,2} = -4 \pm 6i$ c) $x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm i$ d) $x_{1,2} = -2 \pm i$

14. Řešte rovnici v komplexních číslech:

a) $(1-2i)z = 2\bar{z} - i(2+i)$ b) $z\cdot\bar{z} = 3z$ c) $z^2 = z + \bar{z}$ d) $\frac{1+i}{i}\cdot z = (1-i)\cdot(\bar{z} - 1)$

e) $i\cdot(z + \bar{z} - 1) = (1-i)\cdot(z - \bar{z} + 1)$ f) $\bar{z} = |z|$ g) $|z| - z = 1 + 2i$

h) $|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$ i) $\bar{z} = z^3$ j) $z + \bar{z} = |z|\cdot z$ k) $-z = \bar{z}^2$

15. V komplexních číslech řešte rovnici:

a) $z^2 - \frac{3}{2}z\cdot i - 1 = 0$ b) $z^2 - 6xi - 8 = 0$ c) $z^2 - 3(1+i)z + 2i = 0$

d) $(2+3i)z + i\cdot z = 1 - i$ e) $\left(5 - \frac{2}{i}\right)\cdot\bar{z} = z(1-i) + 12$

16. Stanovte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je:

a) $x = 3 - 6i$ b) $x = \frac{4i}{1-i}$ c) $x = [(1-i)\cdot(i+2)]^3$ d) $x = (1+i)^2\cdot i$

17. V oboru komplexních čísel řešte rovnici:

a) $x^2 - 2x + 3 = 0$ b) $x^2 + 4x + 5 = 0$ c) $x^2 - x + 3 = 0$ d) $2x^2 - 3x + 7 = 0$

18. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel:

a) $2(x^2+5) + 5 = -3x(x-1)$ b) $4 - (x-2)^2 - 11 = 0$ c) $3 - (4+x)^2 = 4(1-4x)$

d) $5(x-1) = -x + 1 + (x+2)^2$ e) $x - (x-3)^2 - 13 - x = (2x-3)^2 - 2x$

f) $2x(6+5x) + 344 = (3x-2)^2$ g) $x(2-x) - (x-1)(x+1) - 9 = -(1+x)^2$

h) $-10 - (2x-5)^2 = 2x(-4-x) + 2$ i) $2x(4-3x) + 3x = (-2-x)^2$

19. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel:

a) $11 + 2x - \frac{x^2}{6} = -\frac{2x}{3} - \frac{(x^2+1)}{3}$ b) $1 + \frac{(x+3)^2}{8} = \frac{3(x-3)}{4}$ c) $\frac{1}{4}(2x-1)^2 + 4 = \frac{3}{4}\left(x^2 + \frac{2x}{3}\right) - 0{,}25$

d) $\frac{1}{2} - \frac{86-x}{4} = \frac{(1+x)^2}{16}$ e) $\frac{x^2}{10} + \frac{1}{2}(x-7) + 10 = \frac{3}{2}x - (3{,}5 + x)$

f) $\frac{x(x-2)}{6} - \frac{3x-5}{2} = \frac{13}{6} - \frac{12}{8}x$ g) $1 - \frac{x+1}{4} \cdot 3 - 0{,}8x^2 = \frac{3x(10x-1)}{4} + \frac{669}{20}$

h) $0{,}25(x-5) \cdot 3 - \frac{(x-4)^2}{2} = \frac{13(3x-1)}{4} + 0{,}5x^2$

20. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel:

a) $-\frac{3}{4+x} - \frac{x}{4-x} = -\frac{7+5x}{16-x^2}$ b) $\frac{x-1}{4x+1} + \frac{5x+28}{4x^2+x} = \frac{3}{x}$ c) $\frac{5x^2+29}{9-x^2} + \frac{7x}{x-3} = \frac{3x}{3+x}$

d) $\frac{2}{2x+1} - \frac{x-4}{x-2} = 1 + \frac{8}{(2x+1)(2-x)}$ e) $\frac{5x}{3x+2} = \frac{1}{2-3x} + \frac{6-5x-6x^2}{4-9x^2}$ f) $\frac{4}{x-5} + \frac{3(x+12)}{25-x^2} = \frac{2x}{x+5}$

g) $\frac{6}{8-5x} = \frac{x}{3+x}$ h) $\frac{4x}{2-5x} + \frac{5(1-x)}{5x^2-2x} = \frac{x+1}{-x}$

21. Určete pro které reálné hodnoty parametru p má rovnice imaginární kořeny:

a) $3x(x+3) + 1 = x(p-3x)$ b) $px^2 - 3(p+1)x + p - 2 = 0$ c) $(3p+2)x^2 - 2px\sqrt{3} + p = 0$

d) $px^2 - 3 = 2p(x\sqrt{3} + 1)$ e) $p(2x\sqrt{8} - p) = 6x^2 + 2$ f) $x^2(p+4) - 2(4x-p) = 2(2x^2+p) - (10-p)$

Binomická věta:

22. Řešte v oboru komplexních čísel rovnice.

a) $z^2 = 1$ b) $z^2 = i$ c) $z^2 = -1$ d) $z^2 = -i$ e) $z^3 = 1$ f) $z^3 = i$ g) $z^3 = -1$

h) $z^3 = -i$ i) $z^4 = 1$ j) $z^4 = i$ k) $z^4 = -i$ l) $z^4 = -1$ m) $z^3 - 8 = 0$ n) $z^3 + 8 = 0$

23. Řešte v oboru komplexních čísel rovnice:

a) $z^3 + 8i = 0$ b) $z^4 - 16 = 0$ c) $z^6 - 1 = 0$ d) $z^4 + 4 = 0$ e) $z^3 + 27 = 0$ f) $z^3 = -2 + 2i$ g) $(z - i)^3 = -8$

24. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel pomocí vhodné substituce:

a) $\frac{z^3-1}{z^3+1} + \frac{z^3+1}{z^3-1} = 0$ b) $(z^4 - 8) \cdot (z^6 - i) = 0$ c) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ d) $z^8 + z^4 - 20 = 0$

25. V množině komplexních čísel řešte rovnice v součinovém tvaru:

a) $(z^3 + i) \cdot (z^3 + 8) = 0$ b) $(z^4 + 1)^2 + 2(z^4 + 1) - 8 = 0$

c) $(z^2 + 1) \cdot (z^2 - 1) \cdot (z^2 + i) \cdot (z^2 - i) = 0$ d) $(z^6 - 64) \cdot (z^4 + 16) = 0$

26. V množině komplexních čísel řešte rovnici:

a) $x^{10} - 16x^6 + ix^4 - 16i = 0$ b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$ c) $x^8 - x^4 - 20 = 0$

27. V oboru komplexních čísel řešte rovnice:

a) $x^4 = 16$ b) $x^3 = 27$ c) $x^5 = 32$ d) $x^6 = 64$ e) $x^5 = 3 - 3i$

f) $x^5 = -16\sqrt{3} - 16 \cdot i$ g) $x^3 = 125i$ h) $x^6 = -729$ i) $x^4 = \sqrt{5} - i\sqrt{5}$ j) $x^4 = -1 + i$

Řešení:

1. a) $x = \frac{4}{11}$, $y = \frac{9}{11}$ b) $x = 4$, $y = 2$ c) $x = -6$, $y = 6{,}5$ d) $x = 0{,}2$; $y = 0{,}6$ e) $x = 26\frac{197}{252}$, $y = -10\frac{23}{84}$ f) $x = -195\frac{1}{6}$, $y = 14\frac{1}{6}$ g) $x = \frac{12}{13}$, $y = \frac{15}{13}$ h) $x = 0$, $y = 0$ **2.** . jedná se o kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, pokud nám vyjde diskriminant záporný pak používáme vzoreček: $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$, pokud je diskriminant roven nebo větší jak nula postupujeme stejně jak jsme zvyklí z kvadratických rovnic a) $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3} = \left(-3 \pm \sqrt{3}\right)\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$ rovnice má pouze reálné kořeny. b) $x_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $x_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ c) $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ d) $x_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$, $x_2 = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ e) $x_{1,2} = 4 = 4(\cos 0 + i\sin 0)$ rovnice má pouze jeden dvojnásobný reálný kořen f) $x_1 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ $x_2 = -2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ g) $x_1 = -1{,}2 + 0{,}6i = \frac{3\sqrt{5}}{5}(\cos 153°26' + i\sin 153°26')$ $x_2 = -1{,}2 - 0{,}6i = \frac{3\sqrt{5}}{5}(\cos 206°34' + i\sin 206°34')$ h) $x_1 = 1 + 0{,}5i = \frac{\sqrt{5}}{2}(\cos 26°34' + i\sin 26°34')$, $x_2 = 1 - 0{,}5i = \frac{\sqrt{5}}{2}(\cos 333°26' + i\sin 333°26')$ **3.** a) $x_{1,2} = \pm i\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{47}}{4}$ **4.** jedná se o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty, používáme vzoreček: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$, α je argument čísla D v goniometrickém tvaru, je-li D = 0, pak za α můžeme zvolit libovolné reálné číslo a) $x_{1,2} = -i$ b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{7} + 3i$ c) $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$ **5.** rovnice má 4 řešení: $z = 0$, $z = -1$, $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6. má-li kvadratická rovnice s reálnými koeficienty jeden kořen komplexní číslo, je druhý kořen komplexní číslo s prvním kořenem komplexně sdružené → $x_2 = 5 + 2i$, kvadratická rovnice mající tyto kořeny je např. $x^2 - 10x + 29 = 0$, všechny ostatní kvadratické rovnice s těmito kořeny dostaneme z uvedené rovnice vynásobením celé rovnice určitým reálným číslem. **7.** a) $x = -6$, $y \in \mathbf{R}$ libovolné b) $x = \frac{33}{73}$, $y = \frac{48}{73}$ c) $x = 9$, $y = 28$ d) $x = 13\frac{1}{3}$, $y = 8\frac{2}{3}$ e) $x = 1$, $y = 3$ **8.** a) $z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ b) $z = -\frac{4}{11} - i\frac{3}{11}$ c) $z = \frac{3}{16} + i\frac{3}{4}$ d) $z = a + 2ai$, kde $a \in \mathbf{R}$ libovolné e) dvě řešení: $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + 2i$ f) $z = -\frac{1}{2} + bi$, kde $b \in \mathbf{R}$ g) $z = 0$ h) $z = -\frac{1}{7}$ **9.** a) $x^2 + 4x + 7 = 0$ b) $25x^2 - 10x + 26 = 0$ c) pro tyto kořeny neexistuje kvadratická rovnice s reálnými koeficienty (kořeny nejsou komplexně sdružená čísla), kvadratická rovnice s komplexními koeficienty, jejíž kořeny jsou výše zmíněná komplexní čísla je např. $x^2 + x(3i - 1) - 2(1+i) = 0$ d) jako u c neexistuje kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, kvadr. rovnice s kompl. koef. je např. $x^2 + 4ix - 5 = 0$ e) stejně jako c a d, kvadratická rovnice s komplexními koeficienty je např. $x^2 + x(-1 + 3i) - 4 = 0$ f) stejně jako u c a d, kvadratická rovnice s komplexními koeficienty je např. $x^2 - x(2+2i) + 2i = 0$ **10.** a) $x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm i\sqrt{2}$, $x_{5,6} = -2 \pm i$ b) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7}$ (reálné kořeny), $x_{3,4} = -2 \pm 2i$ c) $x_{1,2} = -2 \pm i$ d) $x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}i$

11. a) $z_{1,2} = \pm\sqrt{3} + 3i$ b) $z_{1,2} = 1 + 2i \pm \sqrt[4]{13}(\cos 90°17' + i\sin 90°17')$ c) $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2\sqrt{5}}(\cos 76°43' + i\sin 76°43')$ d) $z_{1,2} = 3 - i \pm \sqrt[4]{724}(\cos 69° + i\sin 69°)$ e) $z = -\frac{1}{3}i$ f) $z_1 = 3i\sqrt{3}$, $z_2 = i\sqrt{3}$ **12.** a) $u = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$, $v = \frac{1}{3}$ b) $u = \frac{118}{101} + \frac{32}{101}i$, $v = -\frac{56}{101} - \frac{46}{101}i$ c) 2 řešení: $u_1 = -i$, $v_1 = 0$; $u_2 = 0$, $v_2 = -i$ d) 2 řešení: $u_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $v_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ **13.** a) $x^2 + 14x + 50 = 0$ b) $x^2 + 8x + 52 = 0$ c) $9x^2 + 6x + 10 = 0$ d) $x^2 + 4x + 5 = 0$ **14.** a) $z = 7 + 4i$ b) 2 řešení: $z_1 = 0$, $z_2 = 3$ c) 2 řešení: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ d) $\emptyset$ e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ f) $z = a$, $a \in \mathbf{R}^+_0$ g) $\emptyset$ h) 2 řešení: $z_1 = a + ai$, $a \in \mathbf{R}$; $z_2 = a - ai$, kde $a \in \mathbf{R}$ i) 5 řešení: $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$, $z_5 = -1$ j) 3 řešení: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2$

k) 4 řešení: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **15.** a) $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4}i$ b) $z_1 = 4i$, $z_2 = 2i$ c) $z_{1,2} = \frac{(1+i)\cdot(3\pm\sqrt{5})}{2}$ d) $z = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$ e) $z = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}i$ **16.** a) $x^2 - 6x + 45 = 0$ b) $x^2 + 4x + 8 = 0$ c) $x^2 - 36x + 1000 = 0$ d) protože kořen x_1 je reálné číslo, druhý kořen musí být také reálné číslo, můžeme zvolit libovolné a vždy nám vyjde kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, např. $x_2 = -2$ → kvadratická rovnice $x^2 + 4x + 4 = 0$ **17.** a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$ b) $x_{1,2} = -2 \pm i$ c) $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$ d) $x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{47}}{4}$ **18.** a) $x_{1,2} = \frac{3}{10} \pm i\frac{\sqrt{291}}{10}$ b) $x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{7}$ c) $x_{1,2} = 4 \pm i$ d) $x_{1,2} = 1 \pm 3i$ e) $x_{1,2} = 4 \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}$ f) $x_{1,2} = -12 \pm 14i$ g) $x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3}$ h) $x_{1,2} = 7 \pm i\frac{\sqrt{122}}{2}$ i) $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{3\sqrt{7}}{14}$ **19.** a) $x_{1,2} = -8 \pm 2i$ b) $x_{1,2} = \pm i\sqrt{35}$ c) $x_{1,2} = 3 \pm 3i$ d) $x_{1,2} = 1 \pm 4i\sqrt{21}$ e) $x_{1,2} = \pm 10i$ f) $x_{1,2} = 1 \pm i$ g) $x_{1,2} = \pm 2i$ h) $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}i$

20. a) $x_{1,2} = 2 \pm i$ b) $x_{1,2} = 4 \pm 3i$ c) $x_1 = 29$, $x_2 = 1$ d) $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{1}{2}$ e) $x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm i\frac{2}{3}$ f) $x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$ g) $x_{1,2} = \frac{1}{5} \pm i\frac{\sqrt{89}}{5}$ h) $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$ **21.** a) $p \in \left(9 - 2\sqrt{6}, 9 + 2\sqrt{6}\right)$ b) $p \in \left(-2{,}6 - 0{,}4\sqrt{31}, -2{,}6 + 0{,}4\sqrt{31}\right)$ c) $p \in (0, 8)$ d) $p \in (-0{,}6; 0)$ e) $p \in \left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$ f) $p \in (2, 8)$ **Binomická věta:** rovnice ve tvaru $z^n = a$, kde a je libovolné komplexní číslo, goniometrický tvar komplexního čísla a je $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, daná rovnice má vždy právě n různých řešení: $z_k = \sqrt[n]{|a|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, kde k = 0, 1, 2, …, n-1 **22.** a) $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $z_1 = i$, $z_2 = -i$ d) $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ g) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ i) $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$ j) $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2 = \cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi$, $z_3 = \cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi$, $z_4 = \cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi$ k) $z_1 = \cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi$, $z_2 = \cos\frac{7}{8}\pi + i\sin\frac{7}{8}\pi$, $z_3 = \cos\frac{11}{8}\pi + i\sin\frac{11}{8}\pi$, $z_4 = \cos\frac{15}{8}\pi + i\sin\frac{15}{8}\pi$ l) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ m) $z_1 = 2$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$ n) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ **23.** a) $z_1 = 2i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ b) $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2i$ c) $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_4 = -1$, $z_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 1 - i$ e) $z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -3$, $z_3 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ f) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$, $z_3 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$ g) zavedeme substituci $u = z - i$ a řešíme rovnici $u^3 = -8$, pak do řešení u_1, u_2, u_3 dosadíme zpět substituci a získáme z_1, z_2, z_3: $z_1 = 1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = 1 + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$ **24.** a) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $z_5 = -i$ b) rovnice v součinovém tvaru, každou závorku řešíme zvlášť: $z_1 = \sqrt[4]{8}$, $z_2 = i\sqrt[4]{8}$, $z_3 = -\sqrt[4]{8}$, $z_4 = -i\sqrt[4]{8}$, $z_5 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_6 = \cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi$, $z_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_8 = \cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi$, $z_9 = \cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi$, $z_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) řešíme kvadratickou rovnici ve tvaru $\left(z^3\right)^2 - 7z^3 - 8 = 0$, místo x je z^3, obdržíme dva kořeny $z^3_1 = 8$, $z^3_2 = -1$, tím jsme získali dvě binomické rovnice, každou musíme vyřešit samostatně: $z_1 = 2$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_5 = -1$, $z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) řešíme kvadratickou rovnici ve tvaru: $\left(z^4\right)^2 + z^4 - 20 = 0$, obdržíme dva kořeny $z^4_1 = -5$, $z^4_2 = 4$, tím jsem získali dvě binomické rovnice, každou řešíme samostatně: $z_1 = \sqrt[4]{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_3 = \sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_4 = \sqrt[4]{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt{2}$, $z_6 = i\sqrt{2}$, $z_7 = -\sqrt{2}$, $z_8 = -i\sqrt{2}$ **25.** a) rovnice v součinovém tvaru, řešíme každou závorku samostatně: $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_5 = -2$, $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$ b) zavedeme substituci $x = z^4 + 1$ a řešíme kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + 2x - 8 = 0$, získáme kořeny $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ dosazením zpět za x získáme dvě binomické rovnice: $z^4 = -5$, $z^4 = 1$, řešení: $z_1 = \sqrt[4]{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_3 = \sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_4 = \sqrt[4]{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_5 = 1$, $z_6 = i$, $z_7 = -1$, $z_8 = -i$ c) rovnici převedeme na binomickou rovnici $z^8 = 1$: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_5 = -1$, $z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_7 = -i$, $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) rovnice v součinovém tvaru: $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = -2$, $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_7 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_8 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_9 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_{10} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ **26.** a) rovnici převedeme na rovnici v součinovém tvaru: $\left(x^6 + i\right)\cdot\left(x^4 - 16\right) = 0$, řešení: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi$, $x_3 = \cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi$, $x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_5 = \cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi$, $x_6 = \cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi$, $x_7 = 2$, $x_8 = 2i$, $x_9 = -2$, $x_{10} = -2i$ b) kvadratická rovnice s neznámou x^3, obdržíme dvě binomické rovnice, řešení jsou: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_5 = -2$, $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$ c) kvadratická rovnice s neznámou x^4, obdržíme dvě binomické rovnice, řešení jsou: $x_1 = \sqrt[4]{5}$, $x_2 = i\cdot\sqrt[4]{5}$, $x_3 = -\sqrt[4]{5}$, $x_4 = -i\cdot\sqrt[4]{5}$, $x_5 = 1 + i$, $x_6 = -1 + i$, $x_7 = -1 - i$, $x_8 = 1 - i$ d) $x_1 = 2$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2$, $x_4 = -2i$

27. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2$, $x_4 = -2i$ b) $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $x_1 = 2$, $x_2 = 2\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)$, $x_3 = 2\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right)$, $x_4 = 2\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right)$, $x_5 = 2\left(\cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi\right)$ d) $x_1 = 2$, $x_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $x_4 = -2$, $x_5 = -1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = 1 - i\sqrt{3}$ e) $x_1 = \sqrt[5]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{20}\pi + i\sin\frac{7}{20}\pi\right)$, $x_2 = -\sqrt[5]{\frac{3}{4}} + i\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$ $x_3 = \sqrt[5]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{23}{20}\pi + i\sin\frac{23}{20}\pi\right)$ $x_4 = \sqrt[5]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{31}{20}\pi + i\sin\frac{31}{20}\pi\right)$, $x_5 = \sqrt[5]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{39}{20}\pi + i\sin\frac{39}{20}\pi\right)$ f) $x_1 = 2\left(\cos\frac{7}{30}\pi + i\sin\frac{7}{30}\pi\right)$, $x_2 = 2\left(\cos\frac{19}{30}\pi + i\sin\frac{19}{30}\pi\right)$ $x_3 = 2\left(\cos\frac{31}{30}\pi + i\sin\frac{31}{30}\pi\right)$, $x_4 = 2\left(\cos\frac{43}{30}\pi + i\sin\frac{43}{40}\pi\right)$, $x_5 = \sqrt{3} - i$ g) $x_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + i\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + i\frac{5}{2}$, $x_3 = -5i$ h) $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$, $x_2 = 3i$, $x_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$, $x_4 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$, $x_5 = -3i$, $x_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$ i) $x_1 = \sqrt[8]{10}\left(\cos\frac{7}{16}\pi + i\sin\frac{7}{16}\pi\right)$ $x_2 = \sqrt[8]{10}\left(\cos\frac{15}{16}\pi + i\sin\frac{15}{16}\pi\right)$, $x_3 = \sqrt[8]{10}\left(\cos\frac{23}{16}\pi + i\sin\frac{23}{16}\pi\right)$, $x_4 = \sqrt[8]{10}\left(\cos\frac{31}{16}\pi + i\sin\frac{31}{16}\pi\right)$ j) $x_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3}{16}\pi + i\sin\frac{3}{16}\pi\right)$ $x_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{11}{16}\pi + i\sin\frac{11}{16}\pi\right)$, $x_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19}{16}\pi + i\sin\frac{19}{16}\pi\right)$, $x_4 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27}{16}\pi + i\sin\frac{27}{16}\pi\right)$