

METRICKÉ ÚLOHY V PROSTORU - HRA

1. Určete vzdálenost bodu $A[4; 2; -3]$ od roviny $\alpha : 2x - 2y + z + 5 = 0$.

ŘEŠENÍ:

Využijeme vzorečku: $v(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 3 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$.

Vzdálenost bodu A od roviny α je 2.

2. Určete vzdálenost bodu X od počátku soustavy souřadnic, víte-li: Bod X leží na ose x , ale není to počátek soustavy souřadnic. Vzdálenost bodu X od přímky p je roven $\sqrt{6}$.

Přímka p je dána parametricky $p : x = 2 + k, y = 1 - k, z = 1 - k, k \in \mathbf{R}$.

ŘEŠENÍ:

Hledáme bod $X \in x$, tj. $X[x; 0; 0] \neq O[0; 0; 0]$. Vzdálenost bodu X od přímky p je rovna vzdálenosti bodu X od paty kolmice P vedené z bodu X na přímku p .

Platí: $\vec{XP} \cdot \vec{u}_p = 0$ a $|\vec{XP}| = |XP| = \sqrt{6}$

$P \in p \Rightarrow P[2 + k; 1 - k; 1 - k]$

$$\vec{XP} = (2 + k - x; 1 - k; 1 - k)$$

$$\vec{XP} \cdot \vec{u}_p = 0$$

$$(2 + k - x; 1 - k; 1 - k) \cdot (1; -1; -1) = 0$$

$$2 + k - x - 1 + k - 1 + k = 0$$

$$3k = x$$

$$\vec{XP} = (2 + k - 3k; 1 - k; 1 - k)$$

$$\vec{XP} = (2 - 2k; 1 - k; 1 - k)$$

$$|\vec{XP}| = |XP| = \sqrt{(2 - 2k)^2 + (1 - k)^2 + (1 - k)^2} = \sqrt{6 \dots} / 2$$

$$4 - 8k + 4k^2 + 1 - 2k + k^2 + 1 - 2k + k^2 = 6$$

$$6k^2 - 12k + 6 = 6$$

$$6k^2 - 12k = 0 \quad / : 6$$

$$k^2 - 2k = 0$$

$$k(k - 2) = 0$$

$$1. k_1 = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow X[6; 0; 0] \Rightarrow |XO| = 6$$

$$2. k_2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow X[0; 0; 0] \text{ Tento bod nehledáme, bod } X \text{ má být různý od počátku soustavy souřadnic.}$$

Hledaným bodem je bod $X[6; 0; 0]$ a hledaná vzdálenost od počátku je 6.

3. Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\alpha : 2x + y - 2z - 3 = 0, \beta : 2x + y - 2z - 1 = 0$.

ŘEŠENÍ:

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z rovin od druhé z rovin.

$$A \in \alpha \text{ lib.} \Rightarrow A[0; 3; 0]$$

$$v(\alpha, \beta) = v(A, \beta) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je rovna $\frac{2}{3}$.

4. Určete vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

$$p : x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3 - 2t, t \in \mathbf{R}, q : x = s, y = -s, z = -2s, s \in \mathbf{R}.$$

ŘEŠENÍ:

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z přímek od druhé z přímek.

Zvolíme lib. bod jedné z přímek, např. $O[0; 0; 0] \in q$

Vzdálenost bodu O od přímky p je rovna vzdálenosti bodu O od paty kolmice vedené z bodu O na přímku p .

Platí: $\vec{OP} \cdot \vec{u}_p = 0$

$$P[2 + t, 1 - t, 3 - 2t] \in p$$

$$\vec{OP} = (2 + t, 1 - t, 3 - 2t)$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{u}_p = (2 + t, 1 - t, 3 - 2t) \cdot (1; -1; -2) = 0$$

$$2 + t - 1 + t - 6 + 4t = 0$$

$$6t = 5$$

$$t = \frac{5}{6}$$

$$\vec{OP} = \left(\frac{17}{6}; \frac{1}{6}; \frac{8}{6}\right)$$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{8}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{354}{36}} = \frac{\sqrt{354}}{6}$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je rovna $\frac{\sqrt{354}}{6}$.

5. Určete vzdálenost mimoběžek: $p : x = 2 + 2t, y = 1 - t, z = 2 + t, t \in \mathbf{R}, q : x = 1 - k, y = 3 + k, z = 6, k \in \mathbf{R}$.

ŘEŠENÍ:

Vzdálenost dvou mimoběžek je rovna délce nejkratší příčky tj. úsečky kolmé k přímce p i q s krajními body $P \in p, Q \in q$.

$$P[2 + 2t, 1 - t, 2 + t]$$

$$Q[1 - k, 3 + k, 6]$$

$$\vec{PQ} = (-1 - k - 2t, 2 + k + t, 4 - t)$$

1.

$$\vec{PQ} \cdot \vec{u}_p = 0$$

$$(-1 - k - 2t; 2 + k + t; 4 - t) \cdot (2; -1; 1) = 0$$

$$-2 - 2k - 4t - 2 - k - t + 4 - t = 0$$

$$-3k - 6t = 0$$

$$k = -2t$$

2.

$$\vec{PQ} \cdot \vec{u}_q = 0$$

$$(-1 - k - 2t; 2 + k + t; 4 - t) \cdot (-1; 1; 0) = 0$$

$$1 + k + 2t + 2 + k + t = 0$$

$$3 + 2k + 3t = 0$$

Získáme soustavu rovnic

$$k = -2t$$

$$2k + 3t = -3$$

Řešíme dosazovací metodou: $2(-2t) + 3t = -3 \Rightarrow -4t + 3t = -3 \Rightarrow -t = -3 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow k = -6$

$$\vec{PQ} = (-1 + 6 - 6; 2 - 6 + 3; 4 - 3)$$

$$\vec{PQ} = (-1; -1; -1)$$

$$|\vec{PQ}| = |PQ| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

Vzdálenost dvou mimoběžek je rovna $\sqrt{3}$.