

9. GONIOMETRICKÉ FUNKCE

- Velikost úhlu v míře stupňové (stupeň, minuta, vteřina) a v míře obloukové (radián), jednotková kružnice, funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens – vlastnosti, grafy, zavedení funkcí obecně pomocí jednotkové kružnice a goniometrických funkcí ostrého úhlu, význačné hodnoty goniometrických funkcí, určení hodnoty goniometrických funkcí pro libovolný úhel, pro který je funkce definována, úhel v základním tvaru, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, úpravy výrazů s goniometrickými funkcemi, argument funkce.

Příklady:

1. Převedte na základní tvar úhel:

- a) $1\,484^\circ$ b) $2\,991^\circ 30' 20''$ c) $\frac{11}{2}\pi$ d) $21,3\pi$ e) $-2\,000^\circ$
 f) $-\frac{49}{6}\pi$ g) $\frac{23}{4}\pi$ h) 930° i) 960° k) -780°

2. Vypočítejte: (využijte periodičnosti funkcí tj. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$, $\cotg(x + k\pi) = \cotg x$, kde $k \in \mathbb{Z}$)

- a) $\cos 1125^\circ$ b) $\cotg 960^\circ$ c) $\sin \frac{17}{4}\pi$ d) $\tan 780^\circ$ e) $\cos \frac{7}{3}\pi$ f) $\sin 1500^\circ$
 g) $\cotg \frac{29}{4}\pi$ h) $\tan \frac{4}{3}\pi$ i) $\sin 415^\circ$ j) $\cos \frac{123}{3}\pi$ k) $\sin \frac{13}{3}\pi$ l) $\cos \frac{85}{7}\pi$

3. Vypočítejte: (využijte sudosti a lichosti funkcí $\sin$, $\cos$, $\tan$ a $\cotg$ a využijte jejich periodicitu, tj. $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cotg(-x) = -\cotg x$)

- a) $\cos(-750^\circ)$ b) $\tan(-225^\circ)$ c) $\sin(-\frac{9}{4}\pi)$ d) $\cotg(-\frac{\pi}{2})$ e) $\sin(-1470^\circ)$ f) $\cos(-\frac{13}{4}\pi)$
 g) $\tan(-\frac{19}{6}\pi)$ h) $\cotg(-570^\circ)$ i) $\cos(-490^\circ)$ j) $\sin(-1110^\circ)$ k) $\cotg(-\frac{\pi}{4})$ l) $\sin(-\frac{13}{3}\pi)$

4. Vypočítejte:

- a) $\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin 30^\circ - 5\sin 270^\circ + \frac{2}{3}\cos 450^\circ + 2\cos\pi$ b) $2\cos 45^\circ + 5\sin\frac{\pi}{4} - 4\sin\frac{5}{4}\pi$
 c) $2\sin\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{7}{3}\pi \cdot (2 - \cos 2\pi) - \sin\frac{23}{3}\pi$ d) $2\tan 540^\circ - \sqrt{3} \cdot (-\cos 30^\circ) + \sin^2 60^\circ - \tan^2\frac{\pi}{3} - \sin\pi$
 e) $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sqrt{2}\sin 45^\circ + \tan(-60^\circ) - 6\cos 720^\circ$ f) $3(\cos 45^\circ)^2 - (\sin 60^\circ + \tan 30^\circ)^2 - 2\cos\frac{\pi}{2} + \sin 2\pi$

5. Určete, je-li hodnota daného výrazu číslo kladné, záporné nebo nula (využijte vlastností goniometrických funkcí) a potom vypočítejte:

- a) $\tan\frac{5\pi}{6} \cdot \cotg\frac{5}{3}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{3} : \sin\frac{4}{3}\pi$ b) $\cos(-490^\circ) : \tan\frac{7}{3}\pi \cdot \sin 200^\circ \cdot \cotg 550^\circ$
 c) $\sin(-547^\circ) \cdot \cos 780^\circ \cdot \tan\frac{7}{5}\pi : \cotg(-\frac{\pi}{4})$ d) $\cotg(-777^\circ) \cdot \cos(-90^\circ) : \tan(-315^\circ) \cdot \sin(-1000^\circ)$

6. Pomocí vlastností goniometrických funkcí vypočítejte:

- a) $\sin 315^\circ$ b) $\cos \frac{19}{4}\pi$ c) $\tan(-675^\circ)$ d) $\sin 240^\circ$ e) $\cos 300^\circ$ f) $\tan 150^\circ$
 g) $\cotg 135^\circ$ h) $\cos \frac{5}{4}\pi$ i) $\sin 150^\circ$ j) $\cotg \frac{2}{3}\pi$ k) $\tan 315^\circ$ l) $\cos 660^\circ$

7. Pomocí vlastností goniometrických funkcí vypočítejte:

- a) $\cos(-135^\circ)$ b) $\sin(-\frac{4}{3}\pi)$ c) $\tan(-225^\circ)$ d) $\cotg 135^\circ$ e) $\cos \frac{5}{4}\pi$ f) $\sin 150^\circ$
 g) $\cotg \frac{2\pi}{3}$ h) $\tan 315^\circ$ i) $\cos(-135^\circ)$ j) $\sin(-\frac{4}{3}\pi)$ k) $\tan(-225^\circ)$ l) $\cotg(\frac{5}{3}\pi)$

m) $\sin(-330^\circ)$ n) $\cos(-240^\circ)$ o) $\operatorname{tg}(-150^\circ)$ p) $\operatorname{cotg}(-120^\circ)$ r) $\cos(-840^\circ)$ s) $\operatorname{tg}(-495^\circ)$

t) $\sin(-1740^\circ)$ u) $\operatorname{cotg}(-1080^\circ)$ v) $\sin(-\frac{23}{3}\pi)$ w) $\operatorname{cotg}(-\frac{23}{6}\pi)$ z) $\operatorname{tg}(-\frac{17}{3}\pi)$

8. Určete hodnoty $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ úhlu:

a) 120° b) 315° c) 180° d) -90° e) -135° f) 1830° g) -1500°

h) -2550° i) $\frac{\pi}{4}$ j) $-\pi$ k) $-\frac{\pi}{3}$ l) $\frac{\pi}{2}$ m) $\frac{3}{2}\pi$ n) $-\frac{4}{3}\pi$

o) $-\frac{9}{2}\pi$ p) $\frac{67}{6}\pi$

9. Vypočítejte:

a) $\sin \frac{7}{4}\pi \cdot \cos \frac{7}{6}\pi$ b) $\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{11}{6}\pi$ c) $\sin \frac{11}{2}\pi \cdot \cos \frac{13}{4}\pi$ d) $\operatorname{tg} \frac{17}{3}\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{15}{4}\pi$

e) $\sin \frac{27}{4}\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{33}{2}\pi$ f) $\cos \frac{13}{4}\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{11}{3}\pi$ g) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{cotg} 210^\circ - \sin 240^\circ \cdot \cos 300^\circ$

10. Určete, která z čísel -2 ; 0 ; 3 ; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $-\sqrt{7}$; π ; -1 ; $0,258$ lze považovat za hodnotu funkce:

a) sinus b) kosinus c) tangens d) kotangens

Řešení:

1. a) 44° b) $111^\circ 30' 20''$ c) $\frac{3}{2}\pi$ d) $\frac{13}{10}\pi$ e) 160° f) $\frac{11}{6}\pi$ g) $\frac{7}{4}\pi$ h) 210° i) 240° k) 300° 2. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{3}$

e) $0,5$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) 1 h) $\sqrt{3}$ i) $0,8192$ j) -1 k) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ l) $0,901$ 3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) -1 c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 0 e) $-0,5$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $-\sqrt{3}$

i) $-0,643$ j) $-0,5$ k) -1 l) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. a) $\frac{\sqrt{3}}{12} + 3$ b) $11 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-0,75$ e) $-\frac{3\sqrt{3}}{4} - 7$ f) $-\frac{7}{12}$ 5. a) záporné, $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

b) kladné; $0,7198$ c) záporné; $0,1875$ d) 0 6. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $0,5$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) -1 h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i) $0,5$

j) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ k) -1 l) $0,5$ 7. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) -1 d) -1 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $0,5$ g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) -1 i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ j) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ k) -1 l) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ m) $0,5$

n) $-0,5$ o) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ p) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ r) $-0,5$ s) 1 t) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ u) funkce cotg není pro tento úhel definována v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ w) $\sqrt{3}$ z) $\sqrt{3}$

8. (Výsledky jsou psány postupně takto: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$): a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-0,5$; $-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1 ; -1 c)

0 ; -1 ; 0 ; funkce cotg není pro tento úhel definována d) -1 ; 0 ; funkce tg není pro tento úhel definována; 0 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1 ; 1 f) $0,5$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $0,5$; $-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $-0,5$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\sqrt{3}$ i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1 ; 1 ; j) 0 ; -1 ; 0 ; funkce

cotg není pro tento úhel definována k) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $0,5$; $-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ l) 1 ; 0 ; funkce tg není pro tento úhel definována; 0 m) -1 ; 0 ;

funkce tg není pro tento úhel definována; 0 n) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; -0,5; $-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ o) -1; 0; funkce tg není pro tento úhel definována; 0

p) -0,5; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$ 9. a) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) 0 f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ g) $-3 + \frac{\sqrt{3}}{4}$ 10. a) 0, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, -1, 0,258 b) stejně

jako za a c) -2, 0, 3, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, π , -1, 0,258