

ELIPSA

- Elipsa jako množina bodů, elipsa jako řez kuželové plochy rovinou, středová rovnice elipsy, obecná rovnice elipsy, vzájemná poloha elipsy a přímky, sečna elipsy, vnější přímka elipsy, tečna elipsy v dotykovém bodě, tečna z bodu k elipse, vnitřní a vnější bod elipsy, bod na elipse.
1. Napište rovnici elipsy, jejíž osy splývají s osami soustavy souřadnic, a která prochází body $K[0; 6]$, $L[\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$.
 2. Napište rovnici elipsy, jejíž hlavní vrcholy jsou $A[-3; 0]$, $B[3; 0]$ a vzdálenost ohnisek je 4.
 3. Určete souřadnice vrcholů, ohnisek, délku poloos a excentricitu elipsy dané rovnicí:
a) $9x^2 + 25y^2 = 4$ b) $25x^2 + 16y^2 = 400$ c) $x^2 + 2y^2 = 32$
d) $25(x-3)^2 + 9(y+2)^2 = 4$ e) $2x^2 + (y-4)^2 = 32$
 4. Napište rovnici elipsy se středem $S[m; n]$, jejíž hlavní osa je osa x a platí:
a) $a = 3, b = 5$ b) $a = 10$, vzdálenost ohnisek $|EF| = 16$.
 5. Napište rovnici elipsy se středem $S[m; n]$, jejíž ohniska leží na ose y a platí:
a) poloosy mají délky 9 a 7. b) vzdálenost ohnisek je 6, delší osa má velikost 8.
c) vzdálenost ohnisek je 6, $e = 0,6a$ d) vedlejší poloosa má velikost 10, $e = \frac{12}{13}a$.
 6. Jakou rovnici elipsy, která se dotýká souřadnicových os, její osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a
a) střed má souřadnice $S[-4; 6]$. b) osy x se dotýká v bodě $R[4; 0]$ a osy y v bodě $Q[0; 5]$.
 7. Zjistěte, které z následujících rovnic jsou rovnicemi elipsy.
a) $25x^2 + 9y^2 - 100x - 54y - 44 = 0$ b) $25x^2 + 7y^2 + 100x - 28y + 139 = 0$
c) $5x^2 + 7y^2 - 28y + 38 = 0$ d) $x^2 + 9y^2 - 4x + 9y = 0$
e) $4x^2 + 9y^2 - 72x + 36y + 360 = 0$ f) $x^2 - 9y^2 + 8x - 32 = 0$
 8. Je dána elipsa $9x^2 + 4y^2 = 36$. Určete společné body elipsy s přímkou:
a) $p: 3x + 2y - 6 = 0$ b) $p: x - y + 6 = 0$ c) $p: 3\sqrt{3}x + 2y - 12 = 0$
 9. * Vypočítejte délku tětiny elipsy $x^2 + 2y^2 = 18$, která leží na ose I. a III. kvadrantu.
 10. Určete souřadnice společných bodů přímky a elipsy:
a) $p: 3x - 4y - 3 = 0$, $e: 3x^2 + 5y^2 = 120$ b) $p: 5x + y - 20 = 0$, $e: 25x^2 + 3y^2 = 300$
c) $p: x + 2y - 15 = 0$, $e: 3x^2 + 2y^2 = 84$ d) $p = \{[t+1; 2t-1], t \in \mathbf{R}\}$, $e: 9x^2 + 16y^2 = 144$.
 11. Určete všechny hodnoty parametru q , pro které má přímka $y = x + q$ s elipsou $9x^2 + 16y^2 = 144$ alespoň jeden společný bod.
 12. Určete, které z bodů $A[6; 3]$, $B[0; 1]$, $C[1; 3]$, $D[3; -2]$, $E[-2; 4]$, $F[0; 2; 5]$ leží vně a které uvnitř elipsy $3x^2 + 11y^2 = 41$.
 13. Napište rovnice tečen elipsy v jejích průsečících
a) s osou x , $e: 4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 11 = 0$ b) s osou y , $e: x^2 + 2y^2 - 8y = 0$.
 14. Napište rovnice tečen elipsy $3x^2 + 6y^2 = 18$, které jsou kolmé na přímkou $x - y = 0$.
 15. Napište rovnice tečen elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$, které mají směrnici $k = 1$.
 16. Určete reálné číslo a tak, aby přímka $p: x - y + a = 0$ byla tečnou elipsy $e: 9x^2 + 16y^2 = 144$.
 17. Určete reálné číslo a tak, aby přímka $p: 2x + 3y - 12 = 0$ byla tečnou elipsy
a) $e: 25x^2 + a^2y^2 = 144$. b) $e: 25x^2 + a^2y^2 = 25a^2$.
 18. Napište rovnici tečny dané elipsy v bodě dotyku T .
a) $e: 49x^2 + 100y^2 - 294x + 400y - 4059 = 0$, $T[9; y]$ b) $e: 9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y - 129 = 0$, $T[8; y]$.
 19. Určete odchylku tečen vedených z bodu M k elipse e .
a) $e: 5x^2 + 9y^2 = 45$, $M[0; -3]$ b) $e: 9x^2 + 4y^2 = 36$, $M[5; 0]$
c) $9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$, $M[0; -3]$ d) $3(x+2)^2 + 6(y-5)^2 = 216$, $M[3; -3]$.
 20. Dokažte, že $x^2 + 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$ je rovnicí elipsy. Určete její střed, ohniska, vrcholy, délky poloos, excentricitu. Určete přímku, která prochází bodem elipsy $T[x; 5]$ a má s danou elipsou právě jeden společný bod (tj. je její tečnou).
 21. Určete střed a ohniska elipsy: $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.
 22. Napište rovnici elipsy se středem $S[0; 0]$, která prochází body $A[8; 3]$, $B[6; 4]$.
 23. Určete vzájemnou polohu elipsy $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$ a přímky $p: y = kx + 1$, kde k je reálný parametr.
 24. Napište rovnici elipsy, která má osy v osách x, y , ohniska na ose x , excentricitu $e = 6$ a prochází bodem $M[-4; \sqrt{21}]$.

25. Elipsa má střed v bodě $S[0;0]$, hlavní poloosu $a = 5$, vedlejší $b = 3$ a hlavní osu v ose x . Určete úhel tečen vedených v krajních bodech tětivy, která prochází ohniskem $F[e;0]$ kolmo k hlavní ose.
26. Napište rovnice tečen z bodu $A[4;0]$ k elipse $3x^2 + 6y^2 = 18$.
27. * Napište rovnice tečen elipsy $3x^2 + 9y^2 = 45$, které mají od jejího středu vzdálenost $d = 3$.
28. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí elipsy. V případě, že se jedná o elipsu, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.
 a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$ b) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y + 24 = 0$
 c) $3x^2 + 2y^2 + 6x - 12y + 21 = 0$ d) $6x^2 + 3y^2 - 12x + 13 = 0$
29. Pro jaký parametr k je zadaná rovnice rovnicí elipsy:
 a) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + k = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2kx + 4y + 8 = 0$.
30. Určete vzájemnou polohu přímky a elipsy:
 a) $p: 2x + y - 6 = 0$, $e: 4x^2 + y^2 = 20$ b) $p: x = 3$, $e: x^2 + 4y^2 = 16$.
31. Napište rovnici tečny elipsy, která je rovnoběžná s přímkou p .
 a) $e: 9x^2 + y^2 - 5 = 0$, $p: 3x - 2y = 0$. b) $e: x^2 + y^2 - x - 8y + 5 = 0$, $p: x - 2y + 2 = 0$
32. Napište rovnici tečny elipsy, která svírá s kladnou poloosou x úhel 45° . Platí: $e: x^2 + y^2 - x - y - 4 = 0$.
33. Určete délku tětivy, kterou na přímce $x - y + 2 = 0$ vytíná elipsa $e: x^2 + 2y^2 = 8$.
34. * Najděte rovnici elipsy, která se dotýká daných přímek a má osy na osách souřadnic.
 a) $t_1: x + 2y - 27 = 0$; $t_2: 7x + 4y - 81 = 0$ b) $t_1: x + y = 5$, $t_2: x - 4y = 10$.
35. * Najděte rovnici elipsy, která prochází bodem M , dotýká se přímky t a má osy na osách souřadnic.
 a) $M[3;2,4]$, $t: 4x + 5y = 25$ b) $M[4;-1]$, $t: x + 4y = 10$.
36. * Do elipsy $x^2 + 9y^2 = 9$ je vepsán rovnostranný trojúhelník souměrný podle její hlavní osy. Určete souřadnice jeho vrcholů.
37. * Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište čtverec $KLMN$. Určete souřadnice vrcholů čtverce.
38. * Do elipsy $e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je vepsán čtverec. Určete jeho obsah.

ŘEŠENÍ:

1. $e: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ **2.** $e: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ **3.a)** hlavní osa je totožná s osou x , $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{5}$, $e = \frac{8}{15}$, $S[0;0]$, $E[-\frac{8}{15};0]$, $F[\frac{8}{15};0]$, $A[-\frac{2}{3};0]$, $B[\frac{2}{3};0]$, $C[0;\frac{2}{5}]$, $D[0;-\frac{2}{5}]$, **b)** hlavní osa je totožná s osou y , $a = 4$, $b = 5$, $e = 3$, $S[0;0]$, $A[-4;0]$, $B[4;0]$, $C[0;5]$, $D[0;-5]$, $E[0;3]$, $F[0;-3]$ **c)** hlavní osa je totožná s osou x , $a = 4\sqrt{2}$, $b = 4$, $e = 4$, $S[0;0]$, $A[-4\sqrt{2};0]$, $B[4\sqrt{2};0]$, $C[0;4]$, $D[0;-4]$, $E[-4;0]$, $F[4;0]$ **d)** hlavní osa je rovnoběžná s osou y , $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{2}{3}$, $e = \frac{8}{15}$, $S[3;-2]$, $A[\frac{13}{5};-2]$, $B[\frac{17}{5};-2]$, $C[3;-\frac{4}{3}]$, $D[3;-\frac{8}{3}]$, $E[3;-\frac{22}{15}]$, $F[3;-\frac{38}{15}]$, **e)** hlavní osa je rovnoběžná s osou y , $a = 4$, $b = r\sqrt{2}$, $e = 4$, $S[0;4]$, $A[-4;4]$, $B[4;4]$, $C[0;4+4\sqrt{2}]$, $D[0;4-4\sqrt{2}]$, $E[0;4]$, $F[0;-4]$ **4.a)** Hlavní osa je totožná s osou x , proto střed elipsy leží na ose x a platí: $S[m;0]$. Takových elips je nekonečně mnoho. $e: 25(x-m)^2 + 9y^2 - 225 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. **4.b)** Takových elips je nekonečně mnoho. $e: 9(x-m)^2 + 25y^2 - 900 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. **5.** Protože ohniska leží na ose y , střed elipsy leží též na ose y , tedy $S[0;n]$. Takových elips je nekonečně mnoho. **b)** $e: 81x^2 + 49(y-n)^2 = 3969$, **b)** $e: 64x^2 + 55(y-n)^2 = 3520$, **c)** $e: 34x^2 + 25(y-n)^2 = 850$, **d)** $e: 313x^2 + 169(y-n)^2 = 31300$ **6.a)** délky poloos (odvodíme ze souřadnic středu) = vzdálenosti středu od souřadných os (využijte náčrtku), $a = 4$, $b = 6$, $e: 9(x+4)^2 + 4(y-6)^2 = 144$. **b)** Střed S je středem úsečky EF . $e: 25(x-4)^2 + 16(y-5)^2 = 400$. **7.a)** ano $e: \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ **b)** nejedná se o rovnici elipsy, po převedení vyjde na pravé straně záporné číslo. **c)** nejedná se o rovnici elipsy, po převedení vyjde na pravé straně záporné číslo. **d)** ano $e: \frac{4(x-2)^2}{25} + \frac{36(y+\frac{1}{2})^2}{25} = 1$ **e)** nejedná se o rovnici elipsy, na pravé straně vychází nula. **f)** nejedná se o rovnici hyperboly, mezi druhými mocninami je rozdíl. **8.a)** Přímka je sečnou, průsečíky: $P_1[-2;0]$, $P_2[0;3]$ **b)** Přímka je vnější přímkou. **c)** Přímka je tečnou elipsy, bod dotyku: $T[\sqrt{3};\frac{3}{2}]$ **9.** Určíme průsečíky osy I. a III. kvadrantu, tj. přímky $y = x$, s elipsou a určíme jejich vzdálenost. $P_1[\sqrt{6};\sqrt{6}]$, $P_2[-\sqrt{6};-\sqrt{6}]$, tětiva má délku: $|P_1P_2| = 4\sqrt{3}$. **10.a)** $P_1[5;3]$, $P_2[-\frac{125}{31};-\frac{117}{31}]$ **b)** $P[3;5]$ **c)** nemají společný bod **d)** $P_1[\frac{192}{73};\frac{165}{73}]$ **11.** alespoň jeden = jeden a více ..., řešíme přes kvadratickou rovnici s parametrem $q: q \in \langle -5;5 \rangle$. **12.** Body A, C, D, E, F leží vně elipsy, jediný bod B leží ve vnitřní oblasti elipsy. **13.a)** Průsečík s osou x je současně bodem dotyku hledané tečny: $T[x;0]$. Hledanými průsečíky jsou: $T_1[5;5;0]$, $T_2[0;5;0]$. Elipsa má středovou rovnici: $e: \frac{(x-3)^2}{\frac{34}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{34}{9}} = 1$. Tečny: $t_1: 10x + 9y - 55 = 0$, $t_2: 10x - 9y - 5 = 0$. **b)** Průsečík s osou y je současně bodem dotyku hledané tečny: $T[0;y]$. Hledanými průsečíky jsou: $T_1[0;0]$, $T_2[0;4]$. Elipsa má středovou rovnici: $e: \frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$. Tečny: $t_1: y = 0$, $t_2: y = 4$. **14.** Hledaná tečna má rovnici: $t: x + y + c = 0$. Přes kvadratickou rovnici s parametrem c , kdy diskriminant pokládáme roven nule, určíme hodnotu c . $c = \pm 3$. Pak tečny: $t_1: x + y + 3 = 0$, $t_2: x - y - 3 = 0$. **15.** Hledaná tečna má rovnici: $t: y = x + c$. Přes kvadratickou rovnici s parametrem c , kdy diskriminant pokládáme roven nule, určíme hodnotu c . $c = \pm 5$. Pak tečny: $t_1: x - y + 5 = 0$, $t_2: x - y - 5 = 0$. **16.** $a = \pm 5$. Tečny: $t_1: x - y + 5 = 0$, $t_2: x - y - 5 = 0$. **17.a)** Takové a neexistuje. **b)** Takové a neexistuje. **18.** Elipsa má středovou rovnici: $e: \frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$, $T_1[9;3,6]$, $t_1: 21x + 40y - 333 = 0$, $T_2[9;-7,6]$, $t_2: 21x - 40y - 493 = 0$. **b)** Elipsa má středovou rovnici: $e: 9(x-3)^2 + 16(y+2)^2 = 274$, $T_1[8;-0,25]$, $t_1:$

$45x + 28y - 353 = 0$, $T_2[8; -3, 75]$, $t_2 : 45x - 28y - 465 = 0$. **19.a)** $t_1 : 2x - 3y - 9 = 0$, $t_2 : 2x + 3y + 9 = 0$, úhel tečen $\varphi = 67^\circ 23'$ **b)** $t_1 : \sqrt{5}x - 5y - \sqrt{5} = 0$, $t_2 : \sqrt{5}x + 5y - \sqrt{5} = 0$, úhel tečen $\varphi = 48^\circ 11'$ **c)** Tečny nelze sestrojít. **d)** $t_1 : 2x - y - 9 = 0$, $t_2 : 14x + 47y + 99 = 0$, úhel tečen $\varphi = 80^\circ 01'$. **20.** Dokážeme převodem na středový tvar. $S[3; 2]$, $E[3 - 3\sqrt{3}; 2]$, $F[3 + 3\sqrt{3}; 2]$, $A[-3; 2]$, $B[9; 2]$, $C[3; 5]$, $D[3; -1]$, $a = 6$, $b = 3$, $e = 3\sqrt{3}$, $t : y = 5$, bodem dotyku tečny je $T[3; 5]$. **21.** $S[3; -2]$, $E[3 - \sqrt{7}; -2]$, $F[3 + \sqrt{7}; -2]$. Středová rovnice elipsy: $e : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. **22.** Taková elipsa neexistuje. **23.** Přímka je pro $k = \pm\sqrt{2}$ tečnou, pro $k \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ sečnou a pro $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$ vnější přímkou. **24.** Osy leží v osách souřadnic, proto $S[0; 0]$, $e : \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{36} = 1$ **25.** Určíme si excentricitu, $e = 4$, ohnisko F leží na pravé straně od středu S . $F[4; 0]$. Tětiva je kolmice vedená bodem F k hlavní ose, tj. ose x , tětiva p: $x - 4 = 0$. Středová rovnice elipsy: $e : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Určíme průsečíky tětivy p a elipsy: $T_1[4; \frac{9}{5}]$, $T_2[4; -\frac{9}{5}]$. Hledané tečny $t_1 : 4x + 5y - 25 = 0$, $t_2 : 4x - 5y - 25 = 0$ svírají úhel $\varphi = 77^\circ 19'$ **26.** $t_1 : \sqrt{3}x - \sqrt{10}y - 4\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x + \sqrt{10}y - 4\sqrt{3} = 0$. **27.** Body dotyku hledaných tečen leží na kružnici k se středem ve středu elipsy a poloměrem $r = 3$. Platí: $k : x^2 + y^2 = 9$. Určíme průsečíky kružnice a elipsy: $T_1[\sqrt{6}; \sqrt{3}]$, $t_1 : 3\sqrt{6}x + 9\sqrt{3}y - 45 = 0$, $T_2[\sqrt{6}; -\sqrt{3}]$, $t_2 : 3\sqrt{6}x - 9\sqrt{3}y - 45 = 0$, $T_3[-\sqrt{6}; \sqrt{3}]$, $t_3 : -3\sqrt{6}x + 9\sqrt{3}y - 45 = 0$, $T_4[-\sqrt{6}; -\sqrt{3}]$, $t_4 : 3\sqrt{6}x + 9\sqrt{3}y + 45 = 0$. **28.a)** $S[2; 1]$, $a = 2$, $b = 3$, $e = \sqrt{5}$, $E[2; 1 + \sqrt{5}]$, $F[2; 1 - \sqrt{5}]$. **b)** $S[1; 2]$, $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{6}$, $E[1; 2 + \frac{\sqrt{5}}{6}]$, $F[1; 2 - \frac{\sqrt{5}}{6}]$, **c)** nejedná se o rovnici elipsy. **d)** nejedná se o rovnici elipsy. **29.a)** $k < 8$ **b)** $k \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. Jedná se o rovnici kružnice (zvláštní případ elipsy). **30.a)** Přímka je sečnou, $P_1[1; 4]$, $P_2[2; 2]$ **b)** Přímka je sečnou, $P_1[3; \sqrt{72}]$, $P_2[3; -\sqrt{72}]$. **31.a)** $t_1 : 3x - 2y + 5 = 0$, $t_2 : 3x - 2y - 5 = 0$, **b)** $t_1 : x - 2y + 15 = 0$, $x - 2y = 0$. **32.** Úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou x určuje směrnici přímky $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Hledaná tečna má rovnici: $t : y = x + q$. Výsledné tečny: $t_1 : x - y + 3 = 0$, $t_2 : x - y - 3 = 0$, **33.** Průsečíky tětivy s elipsou: $P_1[0; 2]$, $P_2[-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}]$, $|P_1P_2| = \frac{8}{3}\sqrt{2}$. **34.a)** $e : \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{162} = 1$ **b)** $e : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ **35.a)** dvě řešení: $e_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $e_2 : \frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$ **b)** dvě řešení: $e_1 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, $e_2 : \frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1$, **36.** dvě řešení, prvním řešením je trojúhelník s vrcholem A , druhým řešením je trojúhelník s vrcholem B . 1.řešení: $A[-3; 0]$, $L[-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $M[-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$. 2.řešení: $B[3; 0]$, $L'[\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $M'[\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$. **37.** $K[-3; 3]$, $L[3; -3]$, $M[3; 3]$, $N[-3; 3]$ **38.** $S = 4 \cdot \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$