

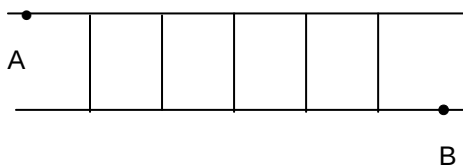
21. KOMBINATORIKA

- Kombinatorika, základní kombinatorická pravidla (pravidlo součtu a součinu), variace bez opakování, permutace bez opakování, faktoriál, kombinace bez opakování, kombinační číslo, úpravy výrazů s kombinačními čísly a faktoriály, rovnice s kombinačními čísly a faktoriály, binomická věta, Pascalův trojúhelník, výpočet určitého členu binomického rozvoje.

Příklady:

Pravidlo součtu a součinu:

- Určete počet všech trojčiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 2, 3 nejvýše jednou.
- Silnice vedoucí podél břehů řeky jsou mezi místem A na jednom břehu a místem B na břehu druhém propojeny pěti mosty. Určete, kolika způsoby je možno dojet z A do B, jestliže po každém mostu a každým bodem každé silnice smíme projet nejvýše jednou.



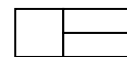
- Určete, kolik lze vytvořit značek Morseovy abecedy skládajících se nejvýše ze čtyř teček nebo čárek, záleží-li v těchto skupinách na pořadí.
- Určete počet všech trojčiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.
- Z místa A do místa B vedou čtyři turistické trasy, z místa B do místa C vedou tři trasy. Určete, kolika způsoby může turista dojít z A do C, chce-li se zastavit v místě B. Kolika způsoby může dojít z A jen do B a zpět, nechce-li jít zpátky toutéž cestou.
- V překladatelské kanceláři potřebují po jednom slovníku pro překlad z češtiny, angličtiny, němčiny, francouzštiny a ruštiny do každého z těchto jazyků. Určete počet slovníků, které si musí opatřit.
- Určete počet všech šestimístních telefonních čísel. Kolik těchto telefonních čísel začíná nulou?
- Z místa A do místa B vedou čtyři turistické cesty, z místa B do C tři. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu:
 - z A do C a zpět;
 - z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát;
 - z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát.
- V košíku je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si má z něho vybrat buď jablko, anebo hrušku tak, aby Věra, která si po něm vybere jedno jablko a jednu hrušku, měla co největší možnost výběru. Určete, co si má vybrat Petr?
- Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka. Určete počet způsobů, kterými je možno se dostat:
 - na vrchol a zpět;
 - na vrchol a zpět tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol;
 - na vrchol a zpět tak, aby aspoň jednou byla použita lanovka.
 - na vrchol a zpět tak, aby lanovka byla použita právě jednou.
- Určete počet čtyřčiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu není nula a ze zbývajících devíti číslic se v něm každá vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z těchto čísel je větších než 9 000? Kolik je menších než 3 000?
- Určete počet všech čtyřčiferných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis je složen z číslic 1, 2, 3, 4, 5 (každá z nich se může opakovat), která jsou dělitelná
 - a) pěti
 - b) dvěma
 - c) čtyřmi
- Kolik zápisů pětčiferných čísel je možno sestavit z číslic 0, 1, 3, 4, 7? Kolik čísel je sudých? Kolik z nich je větších než 30 000? Rozlište případy, kdy se cifry v sestavovaných zápisech mohou či nemohou opakovat?
- V lavici sedí pět chlapců, z nich dva bratři chtějí sedět vedle sebe. Kolika způsoby můžeme chlapce přesadit?

15. Kolik šesticiferných čísel je možno sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6
 a) mají-li čísla začínat cifrou 4; b) ciframi 4 nebo 5; c) jsou-li dělitelná čtyřmi; d) končí-li trojčíslím 216;
 (Řešte pro případ, že se každá cifra v sestavovaných číslech vyskytuje právě jednou, pak pro případ, kdy se cifry mohou opakovat)
16. Kolik jedno- až čtyřciferných čísel je možno sestavit z cifer 0, 2, 4, 6 když
 a) každá cifra se v sestaveném čísle vyskytuje právě jednou;
 b) žádné ze sestavených čísel není dělitelné jedenácti;
 c) každé sestavené číslo je dělitelné šesti.
17. Kolik různých signálů je možno utvořit z pěti praporků různých barev, jsou-li:
 a) tři praporky postaveny vedle sebe (trikolóry)
 b) dva praporky postaveny vedle sebe (bikolóry)
 c) vůbec všech signálů?
18. Kolika způsoby může být odměněno 1., 2., 3. cenou 13 účastníků sportovní soutěže?
19. Ve třídě se vyučuje 10 předmětům. V úterý je 6 vyučovacích hodin, při každé se vyučuje jiný předmět. Kolika různými způsoby lze sestavit úterní rozvrh?
20. Kolik dvojciferných čísel má obě číslice sudé?
21. Kolik pěticefurných čísel má všechny číslice liché?

Variace:

22. Určete počet všech sedmicifurných čísel, ve kterých se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou, a to za předpokladu, že jde:
 a) o čísla přirozená b) o čísla telefonní
23. Určete počet všech možných způsobů, jak mohou být obsazena první tři místa konečné tabulky první fotbalové ligy, která má 16 účastníků.
24. Určete počet způsobů, kterými může deset osob obsadit pět různých funkcí.
25. Vlajka má být sestavena ze tří pruhů různých barev podle obrázku. Určete počet vlajek, které lze takto sestavit, je-li

k dispozici látka červená, modrá, bílá, zelená a žlutá. Kolik z těchto vlajek má svislý pruh žlutý?



26. Kolik trojicefurných čísel lze utvořit z číslic 0, 1, 3, 4, 7, jestliže se žádná číslice neopakuje?
27. Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet dvoučlenných variací bez opakování o 16. Určete původní počet prvků.
28. K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.
 a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit. b) Kolik z nich má modrý pruh?
 c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed? d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?
29. Určete počet všech nejvýše pěticefurných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Dále určete, kolik z nich je menších než 50 000?
30. Výbor sportovního klubu tvoří šest mužů a čtyři ženy. Určete:
 a) kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře.
 b) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby ve funkci předsedy byl muž a ve funkci místopředsedy žena nebo obráceně.
 c) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby právě jedním z nich byla žena.
31. Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin. V kolika z nich se vyskytuje daný předmět a v kolika z nich je tento předmět zařazen na 1. vyučovací hodinu?
32. Kolik trikolorů je možno sestavit ze čtyř barev. V každé trikolorě se může barva opakovat jen jednou.
33. Kolik trojicefurných čísel lze napsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby se ani jedna číslice neopakovala?

34. Kolik různých dvojciferných a trojciferných čísel můžeme napsat z číslic 1, 2, 3, 5, 7, 9 tak, aby se číslice neopakovaly?
35. Kolik čtyřciferných čísel je možno napsat z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 6? Číslice se neopakují.
36. Kolik a) sudých b) lichých šestimístných čísel je možno napsat pomocí číslic 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9? Číslice se neopakují.
37. Kolik čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi je možno napsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby se číslice neopakovaly?
38. Kolik prvků je třeba, aby počet variací ze čtyř prvků (tzv. variací čtvrté třídy) byl dvacetkrát větší než počet variací druhé třídy (tj. ze dvou prvků)?
39. Z kolika prvků je možno utvořit 90 variací druhé třídy?
40. Zvětšíme-li počet prvků o dva, zvětší se počet variací druhé třídy (tj. ze dvou prvků) a) o 82 b) o 62. Kolik je prvků?
41. Kolik různých telefonních čísel lze sestavit, jsou-li všechny linky šestimístné a žádná nesmí začínat nulou ani jedničkou? (chceme jen počet těch čísel, kde se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou).
42. Kolik různých přirozených čísel větších než 400 lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 7, 8? Žádná číslice se neopakuje.
43. Kolik různých přirozených čísel menších než 300 lze sestavit z číslic 0, 2, 5, 8 tak, že se žádná číslice neopakuje?
44. Kolik různých třítónových popěvek lze vytvořit z pěti různých tónů?
45. Šest kamarádů si slíbilo, že si pošlou vzájemně pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic bylo rozesláno.
46. Z kolika prvků lze vytvořit a) 72 b) 42 variací druhé třídy? (variace druhé třídy = variace dvou prvků z n-prvků)
47. Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet variací druhé třídy z těchto prvků vytvořených o 26. Kolik je prvků?
48. Zmenší-li se počet prvků o 5, zmenší se počet variací druhé třídy z těchto prvků vytvořených 4,5krát. Kolik je prvků?
- Kombinace:**
49. Určete počet všech způsobů, kterými je možno na políčka šachovnice 8x8 položit tři pětikorunové mince. Určete dále, kolik z těchto způsobů je takových, že políčka s pětikorunami neleží v téže řadě.
50. Určete počet všech přímek, které procházejí danými dvaceti body, jestliže
a) žádné tři neleží na jedné přímce b) právě pět jich leží v přímce.
51. Trenér basketbalového družstva má poslat na palubovku pěti z dvanácti hráčů, které má k dispozici. Určete:
a) počet všech možností b) počet všech pětic, ve kterých hraje hráč A
52. Smíšené volejbalové družstvo tvořené šesti hráči má podle pravidel turnaje mít aspoň dvě ženy. Určete, kolika způsoby lze toto družstvo sestavit, je-li k dispozici pět mužů a čtyři ženy.
53. Je dána čtvercová síť, ve které je 10 vodorovných a 15 svislých přímek. Určete, kolik je v této síti obdélníků, jejichž všechny čtyři strany leží na přímkách této sítě.
54. Určete kolik kombinací čtvrté třídy je možno utvořit: a) z 10 prvků b) z 20 prvků.
55. Ve třídě je 30 žáků, z nichž budou tři zkoušeni. Kolikovým způsobem je to možné?
56. Ve třídě je 22 dívek a 9 chlapců. Kolikovým způsobem je možno utvořit delegaci, aby v ní byly:
a) dvě dívky a dva chlapci b) tři dívky a jeden chlapec
57. V urně je 8 bílých a 10 černých koulí. Kolikovým způsobem je možno vytáhnout:
a) dvě bílé a jednu černou kouli b) dvě bílé a dvě černé koule
c) tři bílé a dvě černé koule d) dvě bílé a tři černé koule?
58. Jestliže má jistý muž k dispozici 5 kalhot, 8 košil, 5 sak a 7 kravat, kolikovým způsobem se může obléci?
59. Učitel má k dispozici 15 snadných a 12 obtížnějších příkladů. Na písemnou práci chce vybrat 2 snadné a 2 obtížnější příklady. Kolik písemných prací může sestavit?
60. Kolik přímek je určeno 5 body, jestliže: a) žádné tři neleží v jedné přímce b) tři body leží na jedné přímce?
61. Je dáno 12 různých bodů v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině. (rovina je určena vždy 3 různými body, které neleží v jedné přímce). a) Kolik rovin jimi lze proložit b) Kolik rovin jimi lze proložit, leží-li 4 body v jedné rovině?

62. Trenér tenisového družstva má k dispozici 6 tenistů a 5 tenistek. V turnaji mají sehrát celkem 7 utkání, dvě mužské dvouhry, dvě ženské dvouhry, mužskou čtyřhru, ženskou čtyřhru a smíšenou čtyřhru. Kolik různých sestav může trenér vytvořit?
63. Z kolika prvků je možno vytvořit 45 kombinací druhé třídy?
64. Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 36. Kolik je prvků?
65. Zvětší-li se počet prvků o čtyři, zvětší se počet kombinací druhé třídy o 34. Kolik je prvků?
66. Z kolika prvků je možno vytvořit šestkrát víc kombinací čtvrté třídy než kombinací druhé třídy?
67. Ze sedmi mužů a čtyř žen máme vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou aspoň tři ženy. Kolik takových skupin můžeme sestavit?
68. Z kolika prvků lze vytvořit 136 dvouprvkových kombinací (kombinací druhé třídy)?
69. Ve fotbalové soutěži, v které hrálo každé mužstvo s každým jednou, bylo odehráno 153 zápasů. Kolik mužstev se zúčastnilo soutěže?
70. Kolik tanečních párů děvče-chlapec lze sestavit ze 4 chlapců a 6 děvčat?
71. Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivany.
72. Určete, kolika způsoby je možno ze dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li, aby mezi vybranými:
- a) nebyl pan A b) nebyli zároveň pánové A, B. c) byl aspoň jeden z pánů A, B.
73. Kolika způsoby je možné na čtvercové šachovnici s 64 polí vybrat tři pole tak, aby všechna neležela v téže sloupci?
74. Při setkání absolventů školy jedné třídy se absolventi přivítali stisknutím rukou. Kolik bylo celkem stisknutí rukou, jestliže se sešlo 26 absolventů.
75. Kolik různých pětičlenných sportovních družstev lze sestavit z osmi nejlepších sportovců třídy?
76. V krabici je 12 různých pastelek. Kolika způsoby můžeme vybrat tři z nich?
77. Z kolika prvků lze vytvořit a) 36 b) 28 c) 66 d) 78 kombinací druhé třídy?
78. Na tenisovém turnaji, kde hráči hráli každý s každým jednou, bylo odehráno ve dvouhrách 91 zápasů. Kolik se zúčastnilo hráčů?
79. Ve třídě je 13 chlapců a 15 dívek. Kolik různých tříčlenných družstev je možno vytvořit, aby v družstvu byli 2 chlapci a 1 dívka.
80. V zásilce je 40 výrobků. Z nich 36 je I. jakosti, 4 jsou vadné. Kolikovým způsobem lze vybrat 5 výrobků tak, aby tři z nich byly I. Jakosti a 2 vadné?
81. Hokejové družstvo má 20 hráčů, a to 13 útočníků, 5 obránců a 2 brankáře. Kolik různých sestav může trenér vytvořit? (Sestava má 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře.)
82. Dvě skupiny mají dohromady 26 prvků a 160 kombinací druhé třídy. Kolik je prvků v každé skupině?
83. Kolik je prvků, jestliže počet kombinací čtvrté třídy z nich vytvořených je dvacetkrát větší než počet kombinací druhé třídy z těchto prvků.
84. Kolika způsoby můžeme ze sady 12 různých barev, mezi nimiž je jedna bílá, vybrat tři barvy tak, aby:
- a) jedna z nich byla bílá b) ani jedna z nich nebyla bílá?
85. Máme lístky, které jsou očíslovány čísly 1 až 20. Kolika způsoby je z nich možno vybrat tři lístky tak, aby aspoň na jednom bylo číslo menší než šest?
86. V urně je 7 bílých a 6 červených kuliček. Kolika způsoby je z nich možno vybrat 4 kuličky tak, aby mezi nimi byly
- a) dvě bílé b) dvě červené c) aspoň dvě bílé
- d) nejvýše dvě červené e) žádná bílá f) tři bílé a jedna červená
87. Mezi 20 výrobky zjistila kontrola 3 vadné. Kolika způsoby můžeme z těchto 20 výrobků vybrat 15 tak, že:
- a) všechny jsou bezvadné b) mezi nimi je právě jeden vadný c) mezi nimi je nejvýše jeden vadný
- d) mezi nimi jsou právě dva vadné e) mezi nimi jsou všechny tři vadné?
88. Kolik různých tanečních párů (chlapec, děvče) je možno vybrat z 15 chlapců a 12 děvčat?

Úpravy výrazů a rovnice s faktoriály a kombinačními čísly:

89. Upravte:

$$a) \frac{(n-5)!}{(n-7)! \cdot (n^2 - 36)} =$$

$$b) \frac{(n+2)!}{n!} - \frac{(n+6)!}{(n+5)!} - \frac{(n-5)!}{(n-7)!} =$$

$$c) \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-4)!} - \frac{3 \cdot (n-2)!}{(n-1)!} =$$

$$d) \frac{(n-3)!}{(n-5)!} - \frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$e) \frac{6}{(n-4)!} - \frac{4(2n-4) - n^2}{(n-3)!} =$$

$$f) \frac{(n+2)!}{(n+3)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} - \frac{(n+1)!}{(n+3)!} =$$

$$g) \frac{(n-5)!}{(n-6)!} - \frac{(n-3)!}{(n-4)!} + \frac{4 \cdot (n-4)!}{(n-5)!} =$$

$$h) \frac{(n+1)! \cdot (n-2)!}{n! \cdot (n-1)!} =$$

$$i) \frac{(n+4)! \cdot (n+2)!}{(n+3)! \cdot (n+1)!} =$$

90. Vypočtěte nebo zjednodušte:

$$a) \frac{6!}{3! + 4!} =$$

$$b) \frac{3! + 5!}{4! - 5!} =$$

$$c) \frac{2! \cdot (0! + 1! + 2! - 3! + 4!)}{3! - 4!} =$$

$$d) \frac{2 \cdot (n+2)!}{n!} - 4 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-3)!} =$$

$$e) \frac{2}{n!} - \frac{4}{(n+1)!} - \frac{n^2 - 4}{(n+2)!} =$$

$$f) 2 \cdot \frac{n^2 - 25}{(n+5)!} + \frac{n^2 + 2}{(n+4)!} + \frac{3}{(n+3)!} =$$

$$g) \frac{(3n+2)!}{(3n)!} =$$

$$h) \frac{(4n-2)!}{(4n-4)!} =$$

91. Řešte rovnice s faktoriály:

$$a) \frac{(n+7)!}{(n+5)!} - (n^2 + 49) = 6$$

$$b) n \cdot \frac{(n-3)!}{(n-4)!} + n^2 = 2$$

$$c) \frac{(n+2)! + n!}{3} = (n+1)!$$

$$d) 15 \cdot (n+1)! = 30 \cdot n!$$

$$e) \frac{2 \cdot (n-2)! + n!}{(n-1)!} = 4$$

$$f) \frac{(n+3)!}{3! \cdot (n+1)!} - \frac{(n+2)!}{3! \cdot n!} = 4$$

92. Vypočtěte:

$$a) \binom{9}{2} + \binom{9}{3} =$$

$$b) \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} - \binom{7}{4} - \binom{7}{5} - \binom{7}{6} - \binom{7}{7} =$$

$$c) \binom{7}{4} + \binom{6}{4} - \binom{7}{3} - \binom{6}{2} =$$

$$d) \binom{11}{2} - \binom{11}{9} =$$

$$e) \binom{8}{3} + \binom{8}{4} =$$

93. Kolikrát je číslo $A = \binom{100}{10}$ větší než číslo $B = \binom{99}{90}$ a kolikrát je větší než číslo $C = \binom{98}{8}$?

94. Řešte rovnici s kombinačními čísly:

$$a) \binom{10}{x} = 45$$

$$b) \binom{x}{2} - \binom{x+1}{2} = 25$$

$$c) \binom{x+5}{x+3} = 15$$

$$d) \binom{x+4}{x+2} = 28$$

$$e) \binom{x-10}{x-12} = 10$$

$$f) \binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 2$$

$$g) \binom{x+1}{2} + \binom{x}{2} = 4$$

$$h) \binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{6}{4}$$

$$i) (2n+3) \cdot \frac{(n-2)!}{(n-3)!} - 14 \cdot \binom{n}{n-1} = -31$$

$$j) \binom{x}{x-2} - \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{5} = \binom{6}{0} - \binom{x-1}{x-3}$$

$$k) \binom{x-2}{x-4} - \binom{5}{2} \binom{7}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{3} = \binom{3}{0} - \binom{x}{x-2}$$

$$l) \binom{6}{5} \cdot \binom{x}{x-1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{x+2}{x} + \binom{5}{3} = \frac{1}{5} \binom{8}{6} \binom{5}{4}$$

Binomická věta:

95. Užitím binomické věty vypočtěte:

$$a) (a+b)^5$$

$$b) (1-m)^7$$

$$c) (2a^3 - 5)^4$$

$$d) (a-b)^8$$

$$e) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^6$$

$$f) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^7$$

$$g) (2+3\sqrt{3})^7$$

$$h) (a+\sqrt{b})^8$$

96. Zjednodušte:

$$a) (a+b)^5 + (a-b)^5$$

$$b) (x+2)^4 - (x+1)^4$$

$$c) (a+b)^7 - 7ab(a+b)^5 + 14a^2b^2(a+b)^3 - 7a^3b^3(a+b)$$

97. Najděte koeficient členu, který obsahuje x^5 u mnohočlenu: $x^2(1-x)^6 + x^3(1+3x)^4 - x(1+x)^7$ bez umocnění jednotlivých členů.

98. Najděte:

a) pátý člen rozvoje výrazu $(1+3x^2)^{12}$

b) třináctý člen rozvoje výrazu $\left(9x - \frac{1}{3x}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$, jestliže víte, že $\binom{n}{2} = 105$

c) prostřední člen rozvoje výrazu $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$ d) člen rozvoje výrazu $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$, který je přirozeným číslem.

99. Najděte:

a) v rozvoji výrazu $(2 - \sqrt[3]{x})^{10}$ člen obsahující x^2

b) v rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}\right)^{12}$ absolutní člen

100. Rozviňte podle binomické věty:

a) $(x^3 - 1)^5$ b) $(2 + \sqrt{3})^3$ c) $\left(a\sqrt{3} - \frac{1}{b}\right)^4$ d) $\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{-3}$

101. Dokažte pomocí binomické věty, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je výraz

a) $5^n - 1$ dělitelný čtyřmi

b) $8^n - 1$ dělitelný sedmi.

102. V binomickém rozvoji výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$ určete člen, který neobsahuje proměnnou x .

103. Určete všechny členy binomického rozvoje výrazu $(\sqrt[3]{2} - \sqrt{3})^{10}$, které jsou racionálním číslem.

104. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ a) třináctý člen rozvoje b) člen rozvoje neobsahující x

105. Třetí člen binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}} + m\right)^8$ je roven 1.

106. Zjistěte, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{10}$ neobsahuje x .

107. Pro které reálné číslo x platí, že čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $(1+x)^6$ je čtyřikrát větší než třetí člen?

108. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{2}{x^2} - 3x\right)^a$ určete přirozené číslo a tak, aby šestý člen rozvoje obsahoval x^3 .

109. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ určíme a) sedmý člen rozvoje b) člen neobsahující x

110. Pro které reálné číslo x je pátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ roven 105?

111. Který člen mnohočlenu, vzniklého po výpočtu $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ pomocí binomické věty obsahuje x^8 ? Napište tento člen.

112. Vypočtěte:

a) $\left(3x - \frac{2}{y}\right)^4$

b) $(1 - 2\sqrt{3})^4$

c) $(a\sqrt[3]{a} - 3)^3$

d) $\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)^5$

e) $(m+x)^5$

f) $(1-x)^4$

g) $(-\sqrt{2}-x)^5$

113. Umocněte:

a) $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

b) $\left(2a - \frac{1}{a^2}\right)^5 - \left(2a + \frac{1}{a^2}\right)^5$

114. Který člen binomického rozvoje $\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)^7$ obsahuje y^3 ?115. Určete, který člen binomického rozvoje neobsahuje a (tj., že obsahuje a^0):

a) $(3\sqrt{a} - a^{-2})^{10}$

b) $\left(\sqrt[4]{a^3} + \frac{1}{a\sqrt{a}}\right)^8$

116. Určete $x \in \mathbf{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven číslu 2016?117. Určete 10. člen rozvoje výrazu $\left(5x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$ 118. Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ obsahuje x^7 ?119. Určete čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $(x+2)^{12}$.120. Který člen rozvoje $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{14}$ obsahuje x^6 ?**Výsledky:**

1. 18 2. 16 3. Využijeme pravidlo součinu pro sestavení k-tic, $k = 1, 2, 3, 4$ sestavených ze dvou prvků (tečka, čárka) a pak použijeme pravidlo součtu a všechny možnosti dáme dohromady. Celkem 30 4. 648 5. 12, 12 6. 20 7. číslice se mohou v telefonních číslech opakovat 10^6 , nulou začíná 10^5 8. a) $12 \cdot 12 = 144$ b) $6 \cdot 12 = 72$ c) $1 \cdot 12 = 12$ 9. jablko 10. a) 25 b) 20 c) 9 d) 8 11. 3 024, větších než 9 000 je 336, menších než 3 000 je 672. 12. a) 125 b) 250 c) 125 13. celkem 96, 42 sudých, 72 větších než 30 000, při možnosti opakování čísl celkem 2 500, 1000 sudých, 1 874 větších než 30 000. 14. 48 (bratry bereme jako jednoho, takže vybíráme čtyři místa pro čtyři chlapce, což je 24 možností, ale bratři si mezi sebou mohou místo vyměnit, proto celkem 48 možností) 15. a) 120 b) 192 (využijte vhodných dvojic posledních čísel) c) 6; při opakování: a) $6^5 = 7\,776$ b) $8 \cdot 6^4 = 10\,368$ c) $6^3 = 216$ 16. a) 49 b) 112 c) 72 d) 64 17. a) 60 b) 20 c) 325 18. 1 716 19. 151 200 20. 20 21. $5^5 = 3\,125$ 22. a) $V(7,10) - V(6,9) = 544\,320$ b) $V(7,10) = 604\,800$ 23. $V(3,16) = 3\,360$ 24. $V(5,10) = 30\,240$ 25. $V(3,5) = 60$, se žlutým pruhem $V(2,4) = 12$ 26. 48 27. 8 28. a) $V(3,5) = 60$ b) $V(3,5) - V(3,4) = 36$ nebo $3 \cdot V(2,4) = 36$ c) $V(2,4) = 12$ d) $V(3,4) - V(2,4) = 48$ 29. $V(1,10) + V(2,10) + V(3,10) + V(4,10) + V(5,10) = 36\,100$ – počet všech možností jak vytvořit číslo včetně možnosti, že je nula na začátku, nyní musíme odečíst všechny možnosti, kdy je nula na začátku: $1 + V(1,9) + V(2,9) + V(3,9) + V(4,9) = 3610$, celkem všech nejvýše pěticiferných čísel je $36\,100 - 3\,610 = 32\,490$. Čísla menší než 50 000 jsou všechna čtyřciferná (tj. $V(1,10) + V(2,10) + V(3,10) + V(4,10) - [1 + V(1,9) + V(2,9) + V(3,9)] = 5\,860 - 586 = 5\,274$) a všechna pěticiferná začínající 1, 2, 3 nebo 4 (jejich počet je $V(4,9) + V(4,9) + V(4,9) + V(4,9) = 12\,096$. Celkem jejich podle pravidla součtu $5\,274 + 12\,096 = 17\,370$. 30. a) celkem mužů i žen je 10, celkem možností $V(4,10) = 5\,040$ b) využijte pravidlo součtu a součinu $6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,688$ c) $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 1\,920$ 31. $V(6,12) = 665\,280$ – celkem všech rozvrhů na jeden den, s daným předmětem $V(6,12) - V(6,11) = 332\,640$ nebo $6 \cdot V(5,11) = 332\,640$, s daným předmětem první vyučovací hodinu $V(5,11) = 55\,440$. 32. $V(3,4) = 24$ 33. $V(3,5) = 60$ 34. $V(2,6) + V(3,6) = 150$ 35. $V(4,6) - V(3,5) = 300$ 36. a) $3 \cdot V(5,7) - 2 \cdot V(4,6) = 6\,840$ b) $5 \cdot (V(5,7) - V(4,6)) = 10\,800$ 37. $8 \cdot V(2,4) = 96$

- 38.** využijeme vzorce pro počet všech variací k-prvků z n-prvků: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 20 \cdot n \cdot (n-1) \rightarrow n = 7$ **39.** $n = 10$ (využijeme vzorce pro počet všech variací k-prvků z n-prvků) **40.** a) $n = 20$ b) $n = 15$ **41.** $V(6,10) - 2 \cdot V(5,9) = 120\,960$
- 42.** do možností počítáme všechna trojčíselná čísla začínající 7 a 8: $V(2,4) + V(2,4) = 24$, všechna čtyřčíselná čísla $V(4,5) - V(3,4) = 96$ a všechna pětčíselná čísla $V(5,5) - V(4,4) = 96$. Podle pravidla součtu je celkem čísel: $24 + 96 + 96 = 216$ **43.** jednociferných – 3, dvouciferných $V(2,4) - V(1,3) = 9$, trojčíselných menších než 300: $V(2,3) = 6$, celkem podle pravidla součtu: $3 + 9 + 6 = 18$ **44.** $V(3,5) = 60$ **45.** $V(2,6) = 30$ **46.** a) $n = 9$ b) $n = 7$ **47.** $n = 6$ **48.** $n = 10$
- 49.** $\binom{64}{3} = 41\,664$, v téže řadě neleží $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 41\,216$ trojic **50.** a) $\binom{20}{2} = 190$ b) $\binom{20}{2} - \binom{5}{2} + 1 = 181$, od celkového počtu možných výběrů dvou bodů z dvaceti odečteme všechny přímky, které vzniknou spojením některých dvou z pěti bodů ležících na jedné přímce. Tím jsme však odečetli i přímku, která vznikne spojením některých dvou bodů z pěti, proto ji jako jednu možnost musíme zase přičíst. **51.** a) $\binom{12}{5} = 792$ b) $\binom{11}{4} = 330$ **52.** $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{5}{2} = 80$
- 53.** $\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{2} = 4\,725$ **54.** a) $\binom{10}{4} = 210$ b) $\binom{20}{4} = 4\,845$ **55.** $\binom{30}{3} = 4\,060$ **56.** a) $\binom{22}{2} \cdot \binom{9}{2} = 8\,316$ b) $\binom{22}{3} \cdot \binom{9}{1} = 13\,860$
- 57.** a) $\binom{8}{2} \cdot \binom{10}{1} = 280$ b) $\binom{8}{2} \cdot \binom{10}{2} = 1\,260$ c) $\binom{8}{3} \cdot \binom{10}{2} = 2\,520$ d) $\binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 3\,360$ **58.** $\binom{5}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{7}{1} = 1\,400$
- 59.** $\binom{15}{2} \cdot \binom{12}{2} = 6\,930$ **60.** a) $\binom{5}{2} = 10$ b) $\binom{5}{2} - \binom{3}{2} + 1 = 8$ **61.** a) $\binom{12}{3} = 220$ b) $\binom{12}{3} - \binom{4}{3} + 1 = 217$ **62.** 67 500 **63.** $n = 10$
- 64.** $n = 9$ **65.** $n = 7$ **66.** $n = 11$ **67.** $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2} = 161$ **68.** $n = 17$ **69.** $n = 18$ mužstev **70.** $\binom{6}{4} \cdot 4! = 360$ (vybereme 4 dívky ze šesti a pak dívky přeskládáme 4! způsoby). **71.** $\binom{7}{2} \cdot \binom{10}{2} = 945$ **72.** a) $\binom{19}{10} = 92\,378$ b) $\binom{19}{10} - \binom{18}{8} = 48\,620$
- c) $\binom{18}{9} + \binom{18}{9} + \binom{18}{8} = 140\,998$ (buď tam bude jen A nebo tam bude jen B nebo tam bude současně A i B).
- 73.** $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 41\,216$ **74.** $\binom{26}{2} = 325$ **75.** $\binom{8}{5} = 56$ **76.** $\binom{12}{3} = 220$ **77.** a) 9 b) 8 c) 12 d) 13 **78.** 14 hráčů
- 79.** $\binom{13}{2} \cdot \binom{15}{1} = 11\,700$ **80.** $\binom{36}{3} \cdot \binom{4}{2} = 42\,840$ **81.** $\binom{13}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1} = 5\,720$ **82.** 15 a 11 **83.** $n = 18$ **84.** a) 55 b) 165 **85.** 685
- 86.** a) 315 b) 315 c) 560 d) 560 e) 15 f) 2 104 **87.** a) 136 b) 2 040 c) 2 176 d) 7 140 e) 18 654 **88.** 180
- 89.** a) $\frac{n-5}{n+6}$ b) $13n-34$ c) $\frac{n^2-4n-3}{2(n-1)}$ d) $12-6n$ e) $\frac{n^2-2n-2}{(n-3)!}$ f) $\frac{-2}{(n+2) \cdot (n+3)}$ g) $2(n-5)$ h) $\frac{n+1}{n-1}$
- i) $(n+2) \cdot (n+4)$ **90.** a) 24 b) $-\frac{21}{16}$ c) $-\frac{22}{9}$ d) $(2-n) \cdot (n+3)$ e) $\frac{1}{(n+1) \cdot (n-1)!}$ f) $\frac{n+1}{(n+3)!}$ g) $9n^2 + 9n + 2$
- h) $16n^2 - 20n + 6$ **91.** a) $K = \{1\}$ b) $K = \emptyset$ c) $K = \{0\}$ d) $K = \{1\}$ e) $K = \{2, 3\}$ f) $K = \{10\}$ **92.** a) $\binom{10}{3} = 120$ b) 0
- c) 0 d) 0 e) $\binom{9}{4} = 126$ **93.** provedeme podíl A/B a pak podíl A/C $\rightarrow$ A je 10x větší než B a A je 110x větší než C
- 94.** a) $K = \{2, 8\}$ b) $K = \emptyset$ c) $K = \{0\}$ d) $K = \{2\}$ e) $K = \{14\}$ f) $K = \{4\}$ g) $K = \{1\}$ h) $K = \{5\}$ i) $K = \{5\}$ j) $K = \{5\}$ k) $K = \{4\}$ l) $K = \{1\}$ **95.** a) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ b) $1 - 7m + 21m^2 - 35m^3 + 35m^4 - 21m^5 + 7m^6 - m^7$
- c) $16a^{12} - 160a^9 + 600a^6 - 1000a^3 + 625$ d) $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$
- e) $\frac{a^6}{64} - \frac{a^5b}{16} + \frac{5a^4b^2}{48} - \frac{5a^3b^3}{54} + \frac{5a^2b^4}{108} - \frac{ab^5}{81} + \frac{b^6}{729}$ f) $\frac{a^7}{b^7} + 7\frac{a^5}{b^5} + 21\frac{a^3}{b^3} + 35\frac{a}{b} + 35\frac{b}{a} + 21\frac{b^3}{a^3} + 7\frac{b^5}{a^5} + \frac{b^7}{a^7}$
- g) $497\,954 + 289\,461\sqrt{3}$ h) $a^8 + 8a^7\sqrt{b} + 28a^6b + 56a^5b\sqrt{b} + 70a^4b^2 + 56a^3b^2\sqrt{b} + 28a^2b^3 + 8ab^3\sqrt{b} + b^4$

96. a) $2a^5 + 20a^3b^2 + 10ab^4$ b) $4x^3 + 18x^2 + 28x + 15$ c) $a^7 + b^7$ **97.** -1 **98.** a) $40\,095x^8$ b) $\frac{455}{729x^9}$ c) $12\,870\frac{a^8}{x^4}$
d) $a_3 = 60$ **99.** a) $3\,360x^2$ b) 1760 **100.** a) $x^{15} - 5x^{12} + 10x^9 - 10x^6 + 5x^3 - 1$ b) $26 + 15\sqrt{3}$ c) $9a^4 - \frac{12a^3\sqrt{3}}{b} + \frac{18a^2}{b^2} - \frac{4a\sqrt{3}}{b^3} + \frac{1}{b^4}$
d) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ **7.** a) $5^n - 1 = (4+1)^n - 1$ b) $8^n - 1 = (7+1)^n - 1$ **101.** $a_5 = 4\,860$ **102.** $a_5 = \left(\frac{10}{4}\right) \cdot 36 = 7\,560$
103. a) $455x^{-21}$ b) šestý člen rozvoje (pokládáme exponent u x roven nule) $\rightarrow 18 - 3k = 0$, $k = 6$ **104.** $m = \frac{1}{7}$ nebo
 $m = -\frac{1}{7}$ **105.** sedmý člen **106.** $x = 0$ nebo $x = 3$ **107.** $a = 6$ **108.** a) $\frac{105}{8x^{10}}$ b) třetí člen, $a_3 = \frac{45}{256}$ **109.** $x = \frac{1}{8}$ **109.** pátý
člen, $a_5 = 210 \cdot 3^6 x^8$ **110.** a) $8\left(x^4 - 216\frac{x^3}{y} + 216\frac{x^2}{y^2} - 96\frac{x}{y^3} + 16\frac{1}{y^4}\right)$ b) $217 - 104\sqrt{3}$ c) $a^4 - 9a^2\sqrt[3]{a^2} + 27a\sqrt[3]{a} - 27$
d) $\sqrt{mn}\left(\frac{m^2}{n^3} - \frac{5m}{n^2} + \frac{10}{n} - \frac{10}{n} + \frac{5n}{m^2} - \frac{n^2}{m^3}\right)$ e) $m^5 + 5m^4x + 10m^3x^2 + 10m^2x^3 + 5mx^4 + x^5$ f) $1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$
g) $-4\sqrt{2} - 20x - 20x^2\sqrt{2} - 20x^3 - 5x^4\sqrt{2} - x^5$ **111.** a) $\frac{113}{2}$ b) $-160a^2 - \frac{80}{a^4} - \frac{2}{a^{10}}$ **112.** 6. člen **113.** a) 3.člen b) člen
bez a neexistuje **114.** $x = \sqrt[3]{2}$ **115.** $-44 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2}$ **116.** 4.člen **117.** $1760x^9$ **118.** 5.člen