

DERIVACE

1. Určete derivaci funkce v bodě x_0 :
 a) $f : y = x^2, x_0 = 3$ b) $f : y = x^2 - 5x, x_0 = -2$ c) $f : y = \sqrt{x} + 1, x_0 = 4$ d) $f : y = x^3 + \ln x, x_0 = 1$
2. Vypočtěte derivace funkcí:
 a) $f : y = x^3 + 2x^4$ b) $f : y = 6x^2 - 2x + 3$ c) $f : y = 2\sqrt{x} - 3$ d) $f : y = 3\sqrt[3]{x^2} - 5x$ e) $f : y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$
 f) $f : y = 2\cos x - 3\sin x$ g) $f : y = 5\ln x - 6e^x$ h) $f : y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$ i) $f : y = 3^x + \log_3 x$
3. Určete derivaci funkce (pokud to lze, předpis funkce nejprve upravte):
 a) $f : y = \frac{(x+3)^2}{3}$ b) $f : y = \frac{x^2+3x-4}{x-1}$ c) $f : y = \frac{2x^3-6x^2+4}{x-1}$ d) $f : y = \frac{x^2-4}{x+2}$ e) $f : y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$
 f) $f : y = \frac{x^4-1}{x+1}$ g) $f : y = \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$ h) $f : y = \frac{x^3+6x^4}{x^2}$ i) $f : y = \frac{16x^4-1}{2x+1}$ j) $f : y = \frac{\operatorname{tg} x}{2\sin x}$
4. Derivujte funkce dle pravidel součinu a podílu:
 a) $f : y = x \cdot \cos x$ b) $f : y = x^2 \cdot \ln x$ c) $f : y = (3x^4 - 2x) \cdot \sin x$ d) $f : y = \sin x \cdot \cos x$ e) $f : y = \frac{x-3}{x-1}$
 f) $f : y = \frac{x^2+3x}{x-1}$ g) $f : y = \frac{x^2+2x}{1-x^2}$ h) $f : y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$ i) $f : y = \frac{\ln x}{x}$ j) $f : y = \frac{\frac{2}{x}}{x^3-2x}$
 k)* $f : y = x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x$ l) $f : y = x^2 \cdot \sin x + \sqrt{x}$ m) $f : y = \frac{x-3}{x-2}$ n) $f : y = \frac{x^2+3}{2x}$ o) $f : y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
 p) $f : y = \sqrt{x^3} + \cos x(1 - \sin x)$ q) $y = x^2 \operatorname{tg} x - \sqrt{x} \cos x$ r) $f : y = 2 - \frac{3}{\cos x}$ s) $f : y = \ln(1 - x^2) \cdot e^{2x}$
5. Určete první derivaci funkce:
 a) $f : y = (x^2-1)^6$ b) $f : y = \frac{1}{\cos^3 x}$ c) $f : y = \sqrt{2x^2 - x}$ d)* $f : y = (\sqrt{2x^3 + 1} - 2)^6$ e)* $f : y = \sqrt{x + \sqrt{2x}}$
 f) $f : y = \sin(2x - 4)$ g) $f : y = \sin^2 3x$ h) $f : y = e^{\cos x}$ i) $f : y = \operatorname{tg}(3x^2 - 4x)$ j) $f : y = \ln(2x - 4)$
6. Pro které hodnoty proměnné x funkce $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - x$ je:
 a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = -4$ c) $f'(x) = 7$?
7. Je dána funkce $f : y = x^4 - 3x^3$. Určete hodnotu první derivace v bodech:
 a) $x = 5$ b) $x = 4$ c) $x = 0$ d) $x = -2$
8. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = x^4$ v bodě $T[2, 16]$.
9. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku T .
 a) $f : y = 2x^2 - 3x, T[3, ?]$ b) $f : y = -3x^4 + 5x, T[-2, ?]$ c) $f : y = 2\sin x, T[0, ?]$
 d) $f : y = \frac{x+3}{x}, T[2, ?]$ e) $f : y = \frac{x^3-1}{x+1}, T[1, ?]$ f) $f : y = x^2 - 6x + 6, T[?, 1]$
10. * Je dána funkce $g(x) = 4x^2 - 2x + 1$. Na grafu funkce g určete bod A , pro který platí:
 a) tečna v bodě A je rovnoběžná s osou x
 b) tečna v bodě A je rovnoběžná s osou y
 c) tečna v bodě A je rovnoběžná s přímkou $p : x + y - 2 = 0$
 d) tečna v bodě A je kolmá k přímce $p : x - y + 2 = 0$.
 e) tečna v bodě A má směrnici $k = 16$ f) tečna v bodě A svírá s kladnou poloosou x úhel $\varphi = 45^\circ$.
11. Určete lokální extrémů a intervaly monotónnosti funkce f :
 a) $f : y = x^2 - 3x + 4$ b) $f : y = 4x^3 - x^2 + 8x - 4$ c) $f : y = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2$ d) $f : y = 4x^2 - x^4$
 e) $f : y = \frac{x+3}{x-2}$ f) $f : y = x^5 + 10x^4$ g) $f : y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ h)* $f : y = \cos x + 1$ i) $f : y = \frac{2x^2-1}{x^2-3}$
 j) $f : y = \sqrt{x-4}$ k) $f : y = \frac{x^2-2}{x+1}$ l)* $f : y = \frac{\cos x}{2-\sin x}$ m) $f : y = 10x^4 - x^5$ n) $f : y = \frac{2x+3}{x-6}$
12. Určete hodnoty parametrů $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby lokální minimum funkce $f : y = ax^2 + bx + 3$ bylo v bodě $x = 1$ a jeho hodnota byla -4 .
13. Určete inflexní body a intervaly funkce f , ve kterých je funkce konvexní resp. konkávní:
 a) $f : y = 2x^3 - 3x^2$ b) $f : y = x^4 - x^2$ c) $f : y = x^3 - 12x + 9$ d) $f : y = x \cdot e^x$ e) $f : y = x^5 - 6x^3 + 2x$
 f) $f : y = \frac{x^2+1}{x-1}$ g) $f : y = \frac{x-1}{x+3}$ h) $f : y = \frac{1-2x^2}{x^2+1}$ i) $f : y = \frac{x^2-2x+4}{x+2}$ j) $f : y = x^2 + \frac{1}{x}$ k) $f : y = \frac{2x^2-10}{x+3}$

14. Určete rozměry válcové nádoby s víkem, aby měla při objemu 4 litry minimální povrch.
15. Určete rozměry válcové nádoby bez víka, aby měla při objemu 4 litry minimální povrch.
16. Určete rozměry obdélníku, který má při daném obsahu 64 cm^2 minimální obvod.
17. Určete rozměry obdélníku, který má při daném obvodu 40 cm maximální obsah.
18. Do koule o poloměru 10 cm vepište válec maximálního objemu. Určete poloměr podstavy a výšku válce.
19. Určete rozměry rovnoramenného trojúhelníku, který má při daném obvodu maximální obsah.
20. Vyšetřete průběh funkce:
 a) $f: y = x^3 - 3x + 5$ b) $f: y = x^4 - 2x^2 - 8$ c) $f: y = x^3 - 3x^2 + x$ d) $f: y = -x^4 + 2x^2 + 3$
 e) $f: y = x^4 - 4x^3$ f) $f: y = 2x^5 - 10x^4$ g) $f: y = 2x^3 - 8x^2 + 8x$ h) $f: y = x^6 + 2x^3 - 3$
 i) $f: y = \ln(x^2 + 1)$ j) $f: y = x^2 \cdot e^{-x}$ k) $f: y = 2x^2 - \ln x$
21. Vyšetřete průběh funkce:
 a) $f: y = \frac{2-x}{x}$ b) $f: y = \frac{1}{x} - 2$ c) $f: y = \frac{x^2+4}{x-2}$ d) $f: y = \frac{3x}{x^2-9}$ e) $f: y = \frac{2x^2-10}{x+3}$
 f) $f: y = \frac{5x+5}{x^2}$ g) $f: y = \frac{(2x+1)^2}{x-1}$ h) $f: y = \frac{(x-3)^2-9}{x-3}$

ŘEŠENÍ:

- 1.a)** $y' = 2x$, $y'(3) = 6$ **b)** $y' = 2x - 5$, $y'(-2) = -9$ **c)** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(4) = \frac{1}{4}$ **d)** $y' = 3x^2 + \frac{1}{x}$, $y'(1) = 4$
- 2.a)** $y' = 3x^2 + 8x^3$ **b)** $y' = 12x - 2$ **c)** $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ **d)** $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 5$ **e)** $y' = -\frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$ **f)** $y' = -2 \sin x - 3 \cos x$
- g)** $y' = \frac{5}{x} - 6e^x$ **h)** $y' = \frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$ **i)** $y' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 3}$ **3.a)** $y' = \frac{2}{3}x + 2$ **b)** $y' = 1$ **c)** $y' = 4x - 4$ **d)** $y' = 1$ **e)** $y' = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ **f)** $y' = 3x^2 - 2x + 1$ **g)** $y' = \sin x - \cos x$ **h)** $y' = 1 + 12x$ **i)** $y' = 24x^2 - 8x + 2$
- j)** $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ **4.a)** $y' = \cos x - x \sin x$ **b)** $y' = x(\ln x^2 + 1)$ **c)** $y' = (12x^3 - 2) \sin x + (3x^4 - 2x) \cos x$ **d)** $y' = \cos 2x$ **e)** $y' = \frac{2}{(x-1)^2}$ **f)** $y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ **g)** $y' = \frac{2(x^2+x+1)}{(1-x^2)^2}$ **h)** $y' = \frac{2}{1-\sin 2x}$ **i)** $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ **j)** $y' = \frac{8x-8x^3}{(x^4-2x^2)^2}$
- k)** $y' = 2x \ln x \sin x + x \sin x + x^2 \ln x \cos x$ **l)** $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **m)** $y' = \frac{1}{(x-2)^2}$ **n)** $y' = \frac{x^2-3}{2x^2}$ **o)** $y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ **p)** $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \sin x + 2 \sin^2 x - 1$ **q)** $y' = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \sin x$ **r)** $y' = -3 \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ **s)** $y' = 2e^{2x} \left(\ln(1-x^2) - \frac{x}{1-x^2} \right)$
- 5.a)** $y' = 12x(x^2-1)^5$ **b)** $y' = 3 \frac{\sin x}{\cos^4 x}$ **c)** $y' = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$ **d)** $y' = \frac{18x^2(\sqrt{2x^3+1}-2)^5}{\sqrt{2x^3+1}}$
- e)** $y' = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{2x}}}$ **f)** $y' = 2 \cos(2x-4)$ **g)** $y' = 3 \sin 6x$ **h)** $y' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$ **i)** $y' = \frac{6x-4}{\cos^2(3x^2-4x)}$ **j)** $y' = \frac{1}{x-2}$
- 6.** $y' = \frac{3}{2}x^2 - x - 1$ **a)** $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ **b)** takové x neexistuje **c)** $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = -2$ **7.** $y' = 4x^3 - 9x^2$ **a)** $y'(5) = 275$ **b)** $y'(4) = 112$ **c)** $y'(0) = 0$ **d)** $y'(-2) = -68$ **8.** $t: 32x - y - 48 = 0$ **9.a)** $t: 9x - y - 18 = 0$
- b)** $t: 101x - y + 144 = 0$ **c)** $t: y = 2x$ **d)** $t: 3x + 4y - 16 = 0$ **e)** $t: 3x - y - 3 = 0$ **f)** $t_1: 4x + y - 5 = 0$, $t_2: 4x - y - 19 = 0$ **10.a)** $A \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right]$ **b)** taková tečna neexistuje **c)** $A \left[\frac{3}{8}; \frac{13}{6} \right]$ **d)** $A \left[\frac{1}{8}; \frac{13}{16} \right]$ **e)** $A \left[\frac{9}{4}; \frac{67}{4} \right]$ **f)** $A \left[\frac{3}{8}; \frac{13}{6} \right]$
- 11.a)** rostoucí: $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty \right)$, klesající: $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2} \right)$, $S_{MIN} \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{4} \right]$ **b)** rostoucí: $x \in (-\infty; \infty)$, nemá lokální extrém
- c)** rostoucí: $x \in (0; \infty)$, klesající: $x \in (-\infty; 0)$, $S_{MIN} [0; 0]$ **d)** rostoucí: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$, klesající: $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; \infty)$, $S_{MAX1} [-\sqrt{2}; 4]$, $S_{MAX2} [\sqrt{2}; 4]$ **e)** rostoucí: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$, nemá lokální extrém
- f)** rostoucí: $x \in (-\infty; -8) \cup (0; \infty)$, klesající: $x \in (-8; 0)$, $S_{MAX} [-8; 8192]$, $S_{MIN} [0; 0]$ **g)** rostoucí: $x \in (0; 1)$, klesající: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$; $S_{MAX} [1; 1]$ **h)** rostoucí: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi)\}$; klesající: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi)\}$; $S_{MAX} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi; 2]$, $S_{MIN} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\pi + 2k\pi; 0]$ **i)** rostoucí: $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; 0)$, klesající: $x \in (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$, $S_{MAX} \left[0; \frac{1}{3} \right]$ **j)** rostoucí: $x \in (4; \infty)$, nemá lokální extrém. **k)** rostoucí: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$, nemá lokální extrém
- l)** rostoucí: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{13}{6}\pi + 2k\pi \right) \right\}$, klesající: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right) \right\}$, $S_{MAX} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$, $S_{MIN} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; -\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$ **m)** rostoucí: $x \in (0; 8)$, klesající: $x \in (-\infty; 0) \cup (8; \infty)$, $S_{MIN} [0; 0]$, $S_{MAX} [8; 8192]$ **n)** klesající: $x \in (-\infty; 6) \cup (6; \infty)$, nemá lokální extrém.
- 12.** $a = 7, b = -14$ **13.a)** konkávní: $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$, konvexní: $x \in (\frac{1}{2}; \infty)$, $I \left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right]$
- b)** konvexní: $x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}; \infty)$, konkávní: $x \in (-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}})$, $I_1 \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{5}{36} \right]$, $I_2 \left[\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{5}{36} \right]$ **c)** konvexní: $x \in (0; \infty)$, konkávní: $x \in (-\infty; 0)$, $I [0; 9]$ **d)** konvexní: $x \in (-2; \infty)$, konkávní: $x \in (-\infty; -2)$, $I \left[-2; -\frac{2}{e^2} \right]$ **e)** konvexní: $x \in (-\frac{3}{\sqrt{5}}; 0) \cup (\frac{3}{\sqrt{5}}; \infty)$, konkávní: $x \in (-\infty; -\frac{3}{\sqrt{5}}) \cup (0; \frac{3}{\sqrt{5}})$, $I_1 [0; 0]$, $I_2 \left[-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{417}{25\sqrt{5}} \right]$, $I_3 \left[\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{417}{25\sqrt{5}} \right]$ **f)** nemá inflexní body, konkávní: $x \in (-\infty; 1)$, konvexní: $x \in (1; \infty)$ **g)** nemá inflexní body, konkávní: $x \in (-\infty; -3)$,

konvexní: $x \in (-3, \infty)$ **h)** konvexní: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, konkávní: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$, $I_1 \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{4}\right]$, $I_2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{4}\right]$ **i)** nemá inflexní body, konvexní: $x \in (-2; \infty)$, konkávní: $x \in (-\infty; -2)$ **j)** konvexní: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$, konkávní: $x \in (-1; 0)$, $I[-1; 0]$ **k)** konvexní: $x \in (-3, \infty)$, konkávní: $x \in (-\infty; -3)$ nemá inflexní body **14.** $r = 8,6$ cm, $v = 17,2$ cm **15.** $r = 10,84$ cm, $v = 10,84$ cm **16.** $a = b = 8$ cm **17.** $a = b = 10$ cm **18.** $v = 11,55$ cm, $r = 8,165$ cm **19.** $a = b = \frac{o}{3}$ **20.a)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[1; 0]$, $P_{x2}[-2; 0]$, $P_y[0; 2]$, $S_{MIN}[1; 0]$, $S_{MAX}[-1; 4]$, rostoucí: $(-\infty; -1) \cup (1, \infty)$, klesající: $(-1, 1)$, konvexní: $(0, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 0)$, $I[0; 2]$, ABS ani ASS neexistují. **b)** $D(f) = \mathbf{R}$, sudá, není periodická, $P_{x1}[2; 0]$, $P_{x2}[-2; 0]$, $P_y[0; -8]$, $S_{MIN1}[-1; -9]$, $S_{MIN2}[1; -9]$, $S_{MAX}[0; -8]$, rostoucí: $(-1; 0) \cup (1, \infty)$, klesající: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$, konvexní: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$, konkávní: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $I_1 \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{77}{9}\right]$, $I_2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{77}{9}\right]$, ABS ani ASS neexistují. **c)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[0; 0]$, $P_{x2}[2; 0]$, $P_{x3}[1; 0]$, $P_y[0; 0]$, $S_{MIN}[1, 58; -0, 38]$, $S_{MAX}[0, 42; 0, 38]$, rostoucí: $(-\infty; 0, 42) \cup (1, 58; \infty)$, klesající: $(0, 42; 1, 58)$, konvexní: $(1, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 1)$, $I[1; 0]$, ABS ani ASS neexistují. **d)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[\sqrt{3}; 0]$, $P_{x2}[-\sqrt{3}; 0]$, $P_y[0; 3]$, $S_{MIN}[0; 3]$, $S_{MAX1}[-1; 4]$, $S_{MAX2}[1; 4]$, rostoucí: $(-\infty; -1) \cup (0, 1)$, klesající: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, konvexní: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, konkávní: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$, $I_1[-0, 58; 3, 6]$, $I_2[0, 58; 3, 6]$, ABS ani ASS neexistují. **e)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[0; 0]$, $P_{x2}[4; 0]$, $P_y[0; 0]$, $S_{MIN}[3; -27]$, rostoucí: $(3; \infty)$, klesající: $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$, konvexní: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, konkávní: $(0, 2)$, $I_1[0; 0]$, $I_2[2; -16]$, ABS ani ASS neexistují. **f)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[0; 0]$, $P_{x2}[5; 0]$, $P_y[0; 0]$, $S_{MIN}[4; -512]$, $S_{MAX}[0; 0]$, rostoucí: $(-\infty; 0) \cup (4, \infty)$, klesající: $(0, 4)$, konvexní: $(3, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 0) \cup (0; 3)$, $I[3; -324]$, ABS ani ASS neexistují. **g)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[0; 0]$, $P_{x2}[2; 0]$, $P_y[0; 0]$, $S_{MIN}[2; 0]$, $S_{MAX} \left[\frac{2}{3}; \frac{64}{27}\right]$, rostoucí: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty)$, klesající: $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$, konvexní: $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$, konkávní: $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $I \left[\frac{4}{3}; \frac{32}{27}\right]$, ABS ani ASS neexistují. **h)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[1; 0]$, $P_{x2}[-1, 44; 0]$, $P_y[0; -3]$, $S_{MIN}[-1; -4]$, rostoucí: $(-1; 0) \cup (0, \infty)$, klesající: $(-\infty, -1)$, konvexní: $(-\infty, -0.84) \cup (0, \infty)$, konkávní: $(-0, 84, 0)$, $I_1[0; -3]$, $I_2[-0, 84; -3, 83]$, ABS ani ASS neexistují. **i)** $D(f) = \mathbf{R}$, sudá, není periodická, $P_x[0; 0] = P_y$, $S_{MIN}[0; 0]$, rostoucí: $(0, \infty)$, klesající: $(-\infty, 0)$, konvexní: $(-1, 1)$, konkávní: $(-\infty, -1) \cup (1; \infty)$, $I_1[-1; \ln 2]$, $I_2[1; \ln 2]$, ABS ani ASS neexistují. **j)** $D(f) = \mathbf{R}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_x[0; 0] = P_y$, $S_{MIN}[0; 0]$, $S_{MAX} \left[2; \frac{4}{e^2}\right]$, rostoucí: $(0, 2)$, klesající: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, konvexní: $(-\infty; 0, 58) \cup (3, 4; \infty)$, konkávní: $(0, 58; 3, 4)$, $I_1[3, 4; 0, 39]$, $I_2[0, 58; 0, 19]$, ABS neexistuje, ASS existuje pouze pro $x \rightarrow \infty$: $y = 0$. **k)** $D(f) = (0, \infty)$, není sudá ani lichá, není periodická, průsečíky s osami souřadnic neexistují, $S_{MIN} \left[\frac{1}{2}; 1, 19\right]$, rostoucí: $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, klesající: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, konvexní: $(0, \infty)$, ABS: $x = 0$, ale pouze pro $x \rightarrow 0^+$, ASS neexistuje. **21.a)** $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_x[2; 0]$, klesající, nemá lokální extrém, konvexní: $(0, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 0)$, ABS: $x = 0$, ASS: $y = -1$ **b)** $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$, není lichá ani sudá, není periodická, $P_x \left[\frac{1}{2}; 0\right]$, klesající: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, konvexní: $(0, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 0)$, ABS: $x = 0$, ASS: $y = -2$ **c)** $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_y[0; -2]$, $S_{MAX}[-0, 82; -1, 66]$, $S_{MIN}[4, 8; 9, 66]$, rostoucí: $(-\infty; -0, 82) \cup (4, 8; \infty)$, klesající: $(-0, 82; 2) \cup (2; 4, 8)$, konvexní: $(2, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 2)$, ABS: $x = 2$, ASS: $y = x + 2$ **d)** $D(f) = \mathbf{R} - \{\pm 3\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_x[0; 0] = P_y$, klesající: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$, konvexní: $(-3, 0) \cup (3, \infty)$, konkávní: $(-\infty, -3) \cup (0; 3)$, $I[0; 0]$, ABS: $x = 3$, $x = -3$, ASS: $y = 0$ **e)** $D(f) = \mathbf{R} - \{-3\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[\sqrt{5}; 0]$, $P_{x2}[-\sqrt{5}; 0]$, $P_y \left[0; -\frac{10}{3}\right]$, $S_{MIN}[-1; -4]$, $S_{MAX}[-5; -20]$, rostoucí: $(-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$, klesající: $(-5, -3) \cup (-3, -1)$, konvexní: $(-3, \infty)$, konkávní: $(-\infty, -3)$, ABS: $x = -3$, ASS: $y = 2x - 6$. **f)** $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_x[-1; 0]$, $S_{MIN} \left[-2; -\frac{5}{4}\right]$, rostoucí: $(-2, 0)$, klesající: $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, konvexní: $(-3, \infty)$, konkávní: $(-\infty, -3)$, $I \left[-3; -\frac{10}{9}\right]$, ABS: $x = 0$, ASS: $y = 0$. **g)** $D(f) = \mathbf{R} - \{1\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_x \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, $P_y[0; -1]$, $S_{MIN}[2, 5; 24]$, $S_{MAX}[-0, 5; 0]$, rostoucí: $(-\infty, -0, 5) \cup (2, 5; \infty)$, klesající: $(-0, 5; 1) \cup (1; 2, 5)$, konvexní: $(1, \infty)$, konkávní: $(-\infty, 1)$, ABS: $x = 1$, ASS: $y = 4x + 8$ **h)** $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$, není sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1}[0; 0] = P_y$, $P_{x2}[6; 0]$, nemá lokální extrém, rostoucí: $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, konvexní: $(-\infty, 3)$, konkávní: $(3, \infty)$, ABS: $x = 3$, ASS: $y = x - 3$

Grafy pro daný průběh funkce:

př.20 (<http://www.matbuc.tym.cz/prubeh20.html>),

př.21 (<http://www.matbuc.tym.cz/prubeh21.html>).