

## 5. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ

- Pojem funkce, způsoby zadávání funkce (rovnicí, graficky, tabulkou, slovně), definiční obor, obor hodnot, graf funkce, soustava souřadnic Oxy, funkce jako množina bodů – uspořádaných dvojic reálných čísel, funkční hodnota v daném bodě, zápis funkce, vlastnosti funkcí (funkce rostoucí, klesající, konstantní, sudá, lichá, prostá, inverzní, periodická, omezená, omezená), rovnost funkcí, schopnost určit z grafu funkce body, v nichž funkce nabývá extrémů (minimum a maximum) a intervaly monotónnosti. Jak je přesně zadána funkce, rozpoznání zda se jedná nebo nejedná o funkci. Průsečíky funkce s osou x a s osou y.

příklady:

1. Určete hodnotu funkce f:

$$a) y = \frac{3+x}{2x} \text{ pro } x = 1, 2, -3 \text{ a } 5 \quad b) y = 2\sqrt{3x+4} \text{ pro } x = 1, 3, 5, \frac{4}{5}, 0 \quad c) y = x - |x+2| \text{ pro } x = -1, 2, \frac{3}{4}$$

2. Určete definiční obor funkce f z příkladu č.1

3. Určete definiční obor funkce f:

$$\begin{array}{lllll} a) y = \frac{4}{x+3} & b) y = \frac{2x+5}{1-x} & c) y = 3x & d) y = \sqrt{2x+3} & e) y = -\sqrt{x} \\ f) y = \frac{2}{\sqrt{3x+5}} & g) y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} & h) y = \frac{\sqrt{2x-5}}{\sqrt{5-2x}} & i) y = \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} & j) y = \sqrt{x^2-x-6} \end{array}$$

4. Určete definiční obor funkce f:

$$\begin{array}{lllll} a) y = \sqrt{x^2-7x+10} & b) y = x^3-x & c) y = \frac{1}{x+2} & d) y = \frac{x+2}{2x-2} & e) y = \frac{1}{x^3-x} \\ f) y = \frac{2}{(x+3) \cdot (x+2)} & g) y = \frac{3-x}{x^2+7x+12} & h) y = \frac{2+x}{x^2+4x+1} & i) y = \sqrt{\frac{6x+7}{(x+1) \cdot (3x-2)}} & j) y = \frac{x^2}{2x^2+3} \end{array}$$

5. Sestrojte graf funkce:

$$a) y = x \quad b) y = -x \quad c) y = x+2 \quad d) y = 2x+3 \quad e) y = 5x-3$$

6. Dokažte pomocí definice i graficky, že funkce:

$$a) y = 3x+2 \quad b) y = 2x-5 \quad \text{je rostoucí ( pro } \forall x \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) )$$

$$a) \text{ funkce } c) y = -x+5 \quad d) y = 0,5^x \quad \text{je klesající ( pro } \forall x \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) )$$

7. Zjistěte, která ze zadaných funkcí je sudá (tj. pro  $\forall x \in D(f)$  platí:  $-x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)$ )

a která lichá (tj. pro  $\forall x \in D(f)$  platí:  $-x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x)$ ):

$$\begin{array}{ll} a) f_1 = \{[0,1],[1,0],[-1,0],[3,5],[-3,5]\} & b) f_2 = \{[1,5;3],[0,7;-2,1],[-1,5;-3],[-0,7;2,1]\} \\ c) f_3 = \{[-3,2],[1,4],[0,0],[-1,4],[3,2]\} & d) f_4 = \{[5,6],[-5,-6],[0,0],[1,2],[2,3],[3,2]\} \end{array}$$

8. Zjistěte, která z následujících funkcí je sudá a která lichá:

$$\begin{array}{lllll} a) f_1: y = \frac{x}{|x|} & b) f_2: y = -3x^2 & c) f_4: y = x^3 & d) f_5: y = x^4 & e) f_6: y = \frac{1}{x^7} \\ f) f_7: y = -\frac{2+x}{x} & g) f_8: y = -\frac{2}{x^{10}} & h) f_9: y = (x-3)^2 & i) f_{10}: y = x^2+x & j) f_{11}: y = x^4+x^3 \end{array}$$

9. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou rostoucí (resp. klesající) a tvrzení dokažte:

$$a) f: y = -2x-1 \quad b) g: y = 4 \quad c) h: y = 4x+9 \quad d) i: y = |x|+1 \quad e) j: y = |x+1|$$

10. Dokažte, že funkce  $f: y = \frac{x}{x+2}$  je v množině všech nezáporných reálných čísel omezená.

11\*. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou zdola omezené, shora omezené nebo omezené a své tvrzení dokažte:

a)  $f_1: y = 3x$       b)  $f_2: y = 5$       c)  $f_3: y = 2x^2$       d)  $f_4: y = -3x^2$

12\*. Zjistěte, které z daných funkcí jsou periodické:

a)  $f_1: y = -1 \wedge x \in \mathbf{Z}$       b)  $f_2: y = (-1)^{2x} \wedge x \in \mathbf{Z}$       c)  $f_3: y = 3x + 1$       d)  $y = 1^{3x} + (-1)^{3x} \wedge x \in \mathbf{Z}$

13. Určete nejmenší kladné číslo  $x$ , pro něž má funkce  $y = \cos x$  stejnou funkční hodnotu jako pro  $x = -\frac{5}{6}\pi$ .

14. Určete definiční obor funkce  $f: y = \sqrt{\frac{2-3x}{3+2x}}$  průsečíky s osou  $x$  a  $y$ .

15. Určete průsečíky grafu funkce  $f: y = x^2 - 2x - 2$  s osami souřadnic  $x$ ,  $y$ .

16. Rozhodněte, zda dané množiny bodů  $[x, y]$  (uspořádaných dvojic reálných čísel) představují funkce:  $f: x \rightarrow y$

a)  $f_1 = \{[0,2], [-2,0], [4,0], [2,2], [-2,3]\}$       b)  $f_2 = \{[1,1], [2,3], [3,1], [0,1], [-2,3]\}$

c)  $f_3 = \{[2,3], [3,5], [4,6], [-2,3], [-3,5], [-4,6]\}$       d)  $f_4 = \{[-2,1], [-1,0], [0,3], [1,6], [2,3]\}$

pokud se jedná o funkce, pak určete definiční obor a obor hodnot dané funkce.

17. Rozhodněte, zda jsou si rovny dvojice funkcí  $f, g$ : (funkce jsou si rovny, pokud se rovnají jejich definiční obory a každý prvek se při funkci  $f$  i při funkci  $g$  zobrazí na stejný prvek tj.  $D(f) = D(g) \wedge f(x) = g(x)$  pro  $\forall x$ ).

a)  $f: y = x$        $g: y = \sqrt{x^2}$       b)  $f: y = |x|$        $g: y = \sqrt{x^2}$   
c)  $f: y = \frac{x+2}{x^2+x-2}$        $g: y = \frac{1}{x-1}$       d)  $f: y = x-1, x \neq -1$        $g: y = \frac{x^2-1}{x+1}$

18. Zapište pomocí rovnice funkce, jež vyjadřují:

- a) závislost obvodu kruhu na jeho poloměru      b) závislost obsahu kruhu na jeho poloměru  
c) závislost povrchu koule na jejím poloměru      d) závislost objemu koule na jejím poloměru  
e) závislost obvodu čtverce na jeho straně  
f) závislost obsahu rovnostranného trojúhelníku na jeho straně  
g) závislost obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce jeho přepony.  
h) závislost obsahu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce jeho odvěsny.

19. Rozhodněte, které z daných funkcí  $f$  jsou sudé, resp. liché:

a)  $y = x^2 + 1$       b)  $y = x^3$       c)  $y = \frac{1}{x}$       d)  $y = x$       e)  $y = -x$       f)  $y = x + 2$   
g)  $y = 3$       h)  $y = x^2 + 1$       i)  $y = -3x^2 + 2$       j)  $y = \frac{x-1}{2}$       k)  $y = x^5$       l)  $y = \frac{2}{x+3}$

20. Rozhodněte, které z daných funkcí v př. 19 jsou rostoucí, resp. klesající, resp. konstantní:

21. Vyšetřete, zda lze stanovit inverzní funkce k funkcím:

a)  $f: y = -4x + 8$       b)  $g_1: y = x^2$       c)  $g_2: y = x^2, x \in \langle 0, \infty \rangle$       d)  $h: y = \frac{x+3}{x-2}$

22. Najděte hodnotu dané funkce pro  $x = \frac{1}{2}$ :

a)  $y = 2x - 1$

b)  $y = \frac{x}{x-1}$

c)  $y = \sqrt{5-x}$

d)  $y = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$

23. Pro která  $x$  nabývá funkce  $y = \frac{x+3}{x} - \frac{2}{3}$  hodnoty  $y$ :

a)  $-\frac{1}{3}$

b)  $-1$

c)  $1$

d)  $\frac{5}{6}$

e)  $s-1$

f)  $-3$

g)  $0$

h)  $\frac{11}{10}$

i)  $0,25$

24. Určete definiční obor funkce  $f: y = \frac{2}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}$

25. Sestrojte graf funkce dané tabulkou:

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| y | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

a)

|   |    |    |    |   |    |    |    |
|---|----|----|----|---|----|----|----|
| x | -6 | -4 | -2 | 0 | 2  | 4  | 6  |
| y | 3  | 2  | 1  | 0 | -1 | -2 | -3 |

b)

26. Určete souřadnice bodů, které leží a) na ose  $y$

b) na ose  $x$ c) na přímce rovnoběžné s osou  $x$  procházející bodem  $A[0,4]$ 

d) na ose prvního a třetího kvadrantu

27. Doplňte chybějící souřadnici daného bodu, jestliže víte:

a)  $A[?, 2]$ ,  $A$  leží na kladné poloose  $y$ b)  $B[-3, ?]$ ,  $B$  leží na záporné poloose  $x$ c)  $C[?, 5]$ ,  $C \in p$ ,  $p: y = -x$ d)  $D[0, 25; ?]$ , pro souřadnice bodu  $D$  platí  $y = \frac{x^2}{5} - 1$ e)  $A[?, -3]$ ,  $A$  leží na kladné poloose  $y$ 

28. Určete definiční obor funkce  $f$ :

a)  $f_1: y = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}}$

b)  $f_2: y = \frac{x+3}{x} + \frac{x-2}{2x+7} - \frac{x+3}{x-3}$

c)  $y = \frac{1}{5-2x} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

29. Určete definiční obor funkce  $f$ , a pokud je to možné, zjednodušte rovnici funkce:

a)  $y = x^2 + 3x - 7$

b)  $y = \frac{3}{x} + 2$

c)  $y = \frac{1}{2x} + \frac{x}{x-3}$

d)  $y = \frac{x+1}{4x^2 + 4x}$

e)  $y = \frac{3x^2 - 27}{x+3}$

f)  $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$

g)  $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{1-4x^2}$

h)  $y = \sqrt{2 - |x|}$

30. Rozhodněte, zda předpis pomocí něhož jsou každému  $x \in \mathbf{R}$  přiřazena všechna  $y \in \mathbf{R}$  viz. a) b) c) d) e) je funkcí na množině  $\mathbf{R}$ .

a)  $y^2 = 5x + 2$

b)  $y = -|x|$

c)  $|y| = 3x$

d)  $3x + y = 1$

e)  $x^2 + y^2 = 4$

31. Každému přirozenému číslu  $x$  jsou přiřazena všechna přirozená čísla  $y$ , pro která platí, že  $x$  je dělitelem  $y$ .

Rozhodněte, zda je tento předpis funkcí na množině  $\mathbf{N}$  a své tvrzení zdůvodněte.

32. Je dány funkce m:  $y = \frac{x-2}{x-3}$ , n:  $y = \frac{4x}{x-x^2}$ , g:  $y = (x-2)^2$

a) zapište definiční obory všech funkcí

b) Vypočítejte jejich funkční hodnoty v bodech 5; 0;  $-\frac{1}{3}$

c) Zjistěte, zda čísla  $\frac{2}{5}$ ; 0; 1; -2 náleží do oboru hodnot daných funkcí

33. Zjistěte, které z funkcí jsou sudé, resp. liché, rostoucí či klesající v celém definičním oboru:

a)  $y = -4x$  b)  $y = \frac{x^3}{3}$  c)  $y = \frac{|x|}{x}$  d)  $y = x - 1$  e)  $y = 2x - |x + 2|$  f)  $y = (x - 1)^2$

34. Načrtněte graf nějaké funkce, jejíž definiční obor je  $\mathbf{R}$  a která

a) není ani shora omezená, ani zdola omezená, je klesající

b) není ani shora omezená, ani zdola omezená, není rostoucí ani klesající

c) není zdola omezená, je shora omezená, je rostoucí

d) je sudá, není shora omezená

e) je omezená, není ani rostoucí, ani klesající, není ani sudá, ani lichá

35. Určete obor hodnot funkce:

a) f:  $y = \frac{5}{3} + x$  b)  $y = -\frac{1}{x}$ ,  $D(f) = \mathbf{R}^+$  c) f: grafem funkce je množina bodů  $\{[2,5], [1,4] \cup [-3,2]\}$

d) f:  $y = 2|x| - 3$ ,  $D(f) = \{-1, -2, -3, 1, 2, 5\}$  e) f:  $y = 3x^2 - 5$ ,  $x \in \langle -2, 4 \rangle$  f) f:  $y = \sin x$

36. Načrtněte graf funkce dané rovnicí (pozor na definiční obor):

a)  $f_1: y = -2x + 3$ ,  $D(f) = \{-1, -2, -3, 1, 2, 5\}$  b)  $f_2: y = 2x$ ,  $x \in \mathbf{R}^+$  c)  $f_3: y = -2$  d)  $f_4: y = x$

e)  $f_5: y = (-x)^3 + 2$ ,  $x \in \{-2\}$  f)  $f_6: 5y - \frac{2}{4} = 3y - x + 5$ ,  $x \in \langle 1, 5 \rangle$

37. Určete průsečíky s osami souřadnic a chybějící souřadnici bodu A tak, aby bod A ležel na grafu funkce dané rovnicí:

a)  $y = 2x + 3$ ,  $A[-2, ?]$  b)  $y = \frac{x}{3} + 2x - \frac{3}{5}$ ,  $A[?, 0,8]$  c)  $y = 5x^2 - 125$ ,  $A[?, 5]$  d)  $y = \frac{|3-2x|}{|-3|}$ ,  $A[-4, ?]$

38. Ověřte početně, zda body C, D či E leží na grafu funkce dané rovnicí:

a) f:  $y = 3 - |x + 2|$ ,  $C[-2, 1]$ ,  $D[-6, \frac{11}{2}]$ ,  $E[3, -2]$  b) g:  $y = \sqrt{-x(x-3)}$ ,  $C[-3, 3\sqrt{2}]$ ,  $D[4, 5]$ ,  $E[2, \sqrt{2}]$

c) h:  $\frac{x-y}{3} = \frac{1}{4} + x - y$ ,  $C[\frac{5}{8}, 1]$ ,  $D[-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}]$  d)  $h_1: y = x^4 - 2x^2 + 1$ ,  $C[-1, -1]$ ,  $D[2, 9]$

39. Určete zda daný bod leží na grafu, pod grafem nebo nad grafem funkce f dané rovnicí:

a)  $y = -4 + \frac{x}{3}$ ,  $A[9, -5]$  b)  $y = -\frac{x^2}{3} - x + 1$ ,  $B[2, 3]$  c)  $y = \frac{3}{x^2} - 2$ ,  $C[4, 6]$

40. Vypočtete souřadnice bodu, v němž graf funkce f:  $y = -\frac{2}{5}x + 3$  protíná

a) osu x b) osu y c) graf funkce g:  $y = 3x - 2$  d) s osou I. a III. kvadrantu e) graf funkce  $y = -1$

41. Rozhodněte, zda funkce f zadaná rovnicí je prostá:

$$\text{a) } y = -5 + x \quad \text{b) } y = 3x - \frac{1}{3} \quad \text{c) } y = -\frac{x - x^3}{x} \quad \text{d) } y = 0,9x^2 \quad \text{e) } y = \frac{4x^2}{x}$$

42. Určete definiční obor funkce:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \sqrt{\frac{2}{x-3} + \frac{6}{3x-1}} - \frac{5}{3x+2} & \text{b) } f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6-3x}} & \text{c) } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}} & \text{d) } f(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{|x-1|}} \\ \text{e) } f(x) &= \frac{x-1}{x\sqrt{2-x-x^2}} & \text{f) } f(x) &= \sqrt{\frac{x+2}{5-x}} & \text{g) } f(x) &= \sqrt{9x-x^3} & \text{h) } f(x) &= \frac{3-2x}{x^2-2x-3} \end{aligned}$$

43. Pro danou funkci určete, pro která  $a \in \mathbf{R}$  platí uvedená nerovnost:

$$\text{a) } f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad f(a-1) < f(a) - 7 \quad \text{b) } f(x) = -x^2 + 2x - 3, \quad f(a-4) > f(a) + 3$$

44. Uvažujte funkci danou předpisem  $f(x) = \left( \frac{8 - x^2 + 2x}{5x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{2}}$

a) Určete definiční obor funkce f

b) Vypočítejte průsečíky grafu funkce f s osou x a s osou y.

**Výsledky:**

1. a)  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = \frac{5}{4}$ ,  $f(-3) = 0$ ,  $f(5) = \frac{4}{5}$  b)  $f(1) = 2\sqrt{7}$ ,  $f(3) = 2\sqrt{13}$ ,  $f(5) = 2\sqrt{19}$ ,  $f\left(\frac{4}{5}\right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{32}{5}}$ ,  $f(0) = 4$  c)  $f(-1) = -2$ ,

$f(2) = -2$ ,  $f\left(\frac{3}{4}\right) = -2$  2. a)  $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$  b)  $D(f) = \left\langle -\frac{4}{3}, \infty \right\rangle$  c)  $D(f) = \mathbf{R}$  3. a)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-3\}$  b)  $D(f) = \mathbf{R} - \{1\}$  c)  $D(f) = \mathbf{R}$

d)  $D(f) = \left\langle -\frac{3}{2}, \infty \right\rangle$  e)  $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$  f)  $D(f) = \left\langle -\frac{5}{3}, \infty \right\rangle$  g)  $D(f) = \langle -3, 1 \rangle \cup (1, \infty)$  h)  $D(f) = \emptyset$  i)  $D(f) = \left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \langle -1, \infty \rangle$

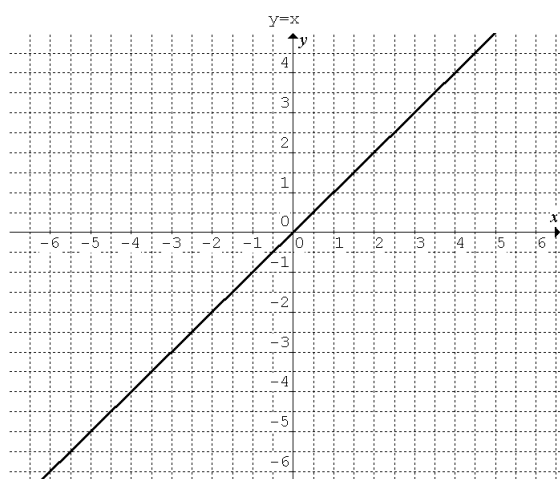
j)  $D(f) = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$  4. a)  $D(f) = \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle$  b)  $D(f) = \mathbf{R}$  c)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$  d)  $D(f) = \mathbf{R} - \{1\}$  e)  $D(f) = \mathbf{R} - \{0, 1\}$

f)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-2, -3\}$  g)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, -4\}$  h)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-2 \pm \sqrt{3}\}$

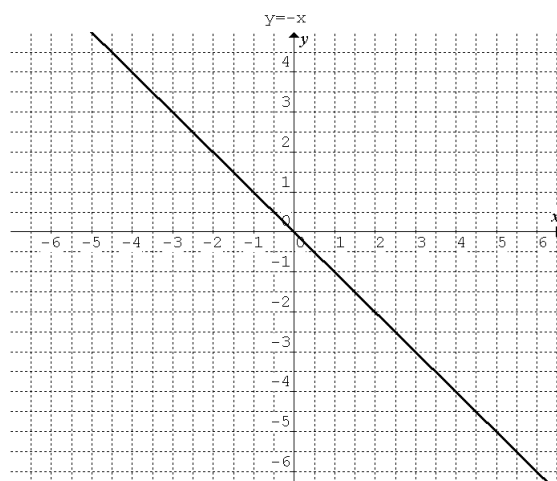
$= \left\langle -\frac{7}{6}, -1 \right\rangle \cup \left( \frac{2}{3}, \infty \right)$  j)  $D(f) = \mathbf{R}$  jmenovatel je větší než nula pro

každé reálné číslo, druhá mocnina z reálného čísla je vždy větší rovna nule.

5. a)



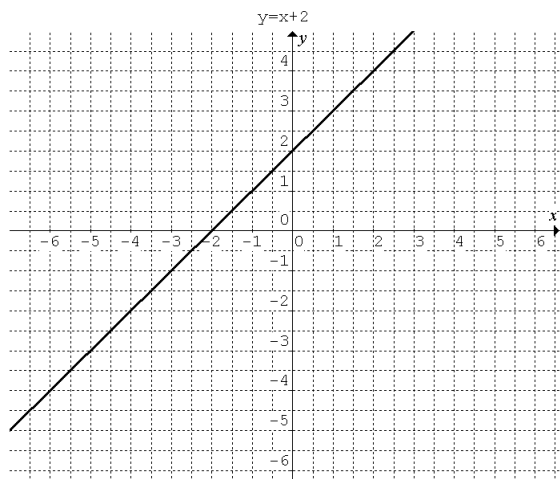
b)



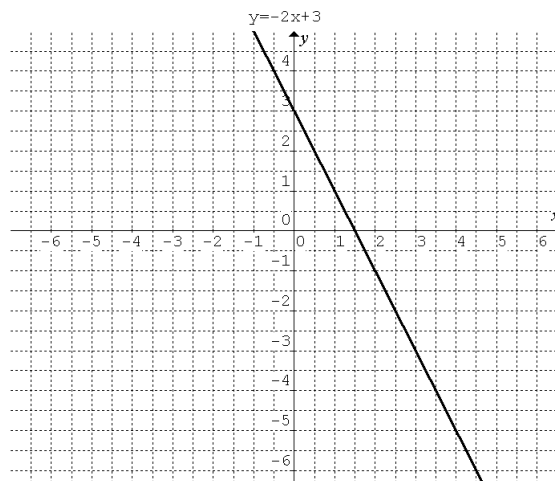
i)  $D(f)$

nebo

c)

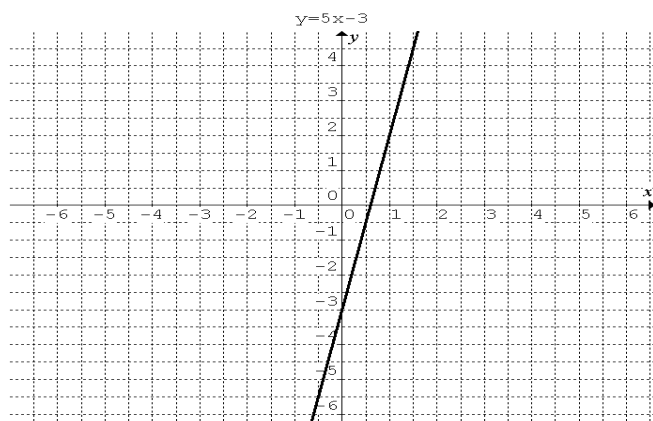


d)



d)

e)



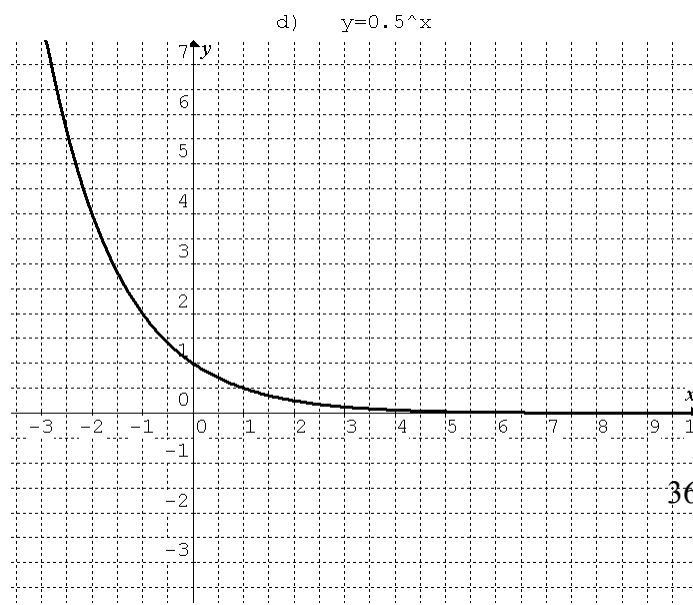
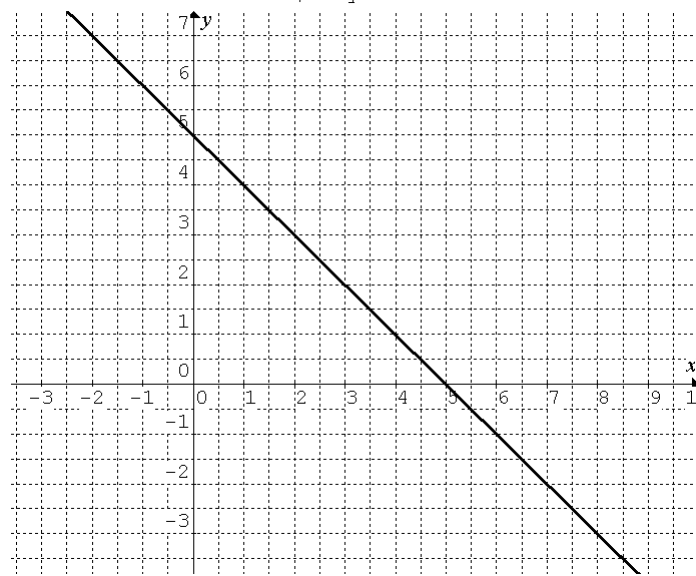
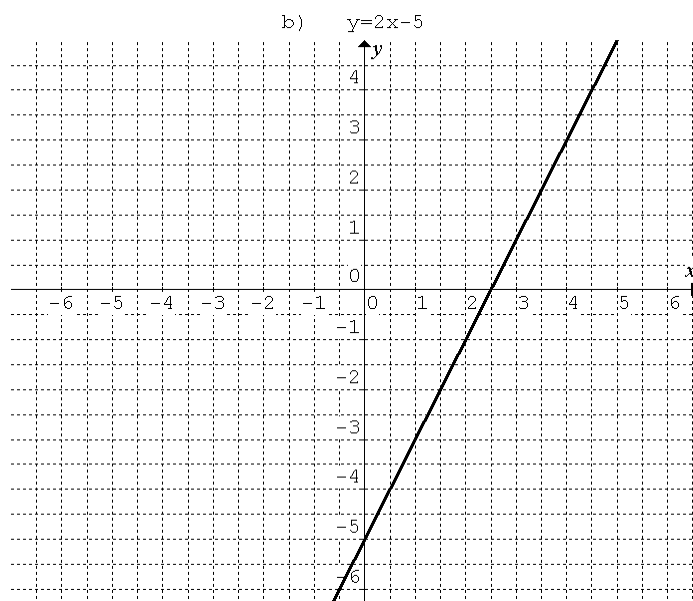
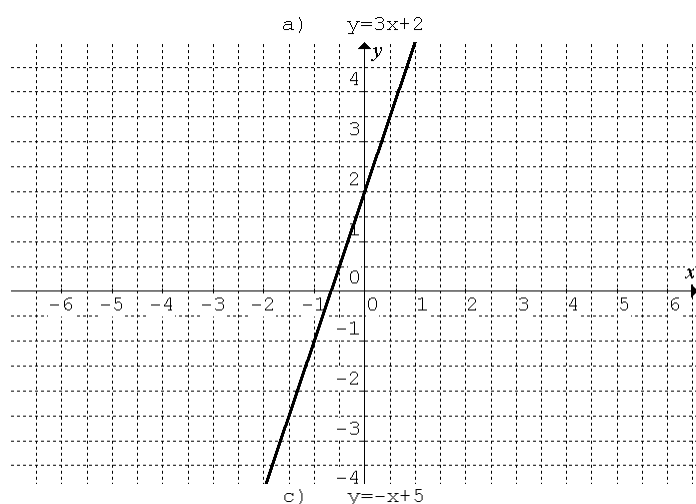
6. a) dokazujeme takto:

$3x_2 + 2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$  je rostoucí. b)  $x_1 < x_2 \rightarrow 2x_1 < 2x_2 \rightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$  je rostoucí c)  $x_1 < x_2$

$\rightarrow -x_1 > -x_2 \rightarrow -x_1 + 5 > -x_2 + 5 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow$  je

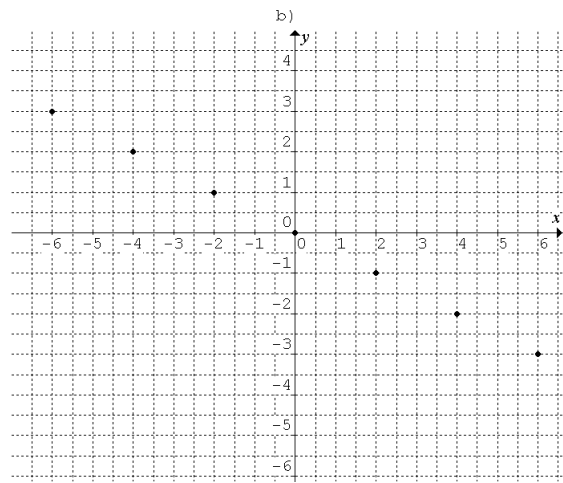
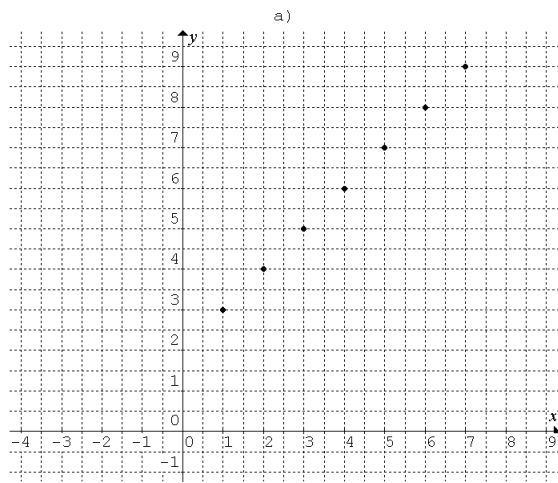
klesající d)  $x_1 < x_2 \rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \rightarrow \frac{1}{2^{x_1}} > \frac{1}{2^{x_2}} \rightarrow f(x_1) >$

$f(x_2) \rightarrow$  je klesající



7. a) sudá b) lichá c) sudá d) ani sudá ani lichá, např.  $1 \in D(f) \wedge -1 \notin D(f)$  8. a) lichá b) sudá c) lichá d) sudá  
e) lichá f) ani sudá ani lichá např.  $f(2) = -2, f(-2) = 0$  g) sudá h) ani sudá ani lichá např.  $f(1) = 4, f(-1) = 16$  i) ani sudá, ani lichá např.  $f(2) = 6, f(-2) = 2$  j) ani sudá, ani lichá např.  $f(1) = 2, f(-1) = 0$  9. postupujeme stejně jako v př. 6
- a) klesající b) ani rostoucí ani klesající např.  $f(2) = 4, f(4) = 4 \rightarrow f(2) \nless f(4)$  ani  $f(2) \ngtr f(4)$  c) rostoucí d) ani rostoucí, ani klesající  $f(-2) = 3, f(2) = 3, f(-2) \less f(2)$  ani  $f(-2) \gtr f(2)$  e) ani rostoucí, ani klesající  $f(-3) = 2, f(1) = 2, f(-3) \less f(1)$  ani  $f(-3) \gtr f(1)$
10. aby funkce byla omezená, musí existovat reálné číslo  $d$  tak, aby  $|f(x)| \leq d$ , v tomto případě můžeme zvolit za  $d, d = 1$ , platí  $|f(x)| \leq 1$  tedy  $-1 \leq f(x) \leq 1$ , když vyřešíme tuto nerovnici, dojdeme k výsledku, že nerovnice platí pro všechna  $x$  z definičního oboru  $\mathbf{R}^+$  11\*. a) není omezená b) je omezená shora i zdola  $\rightarrow$  omezená  $|f(x)| \leq 5$  pro každé  $x \in D(f)$  c) zdola omezená  $0 \leq f(x)$  pro každé  $x \in D(f)$  d) omezená shora  $f(x) \leq 0$  pro každé  $x \in D(f)$
- 12\*. a) periodická b) periodická c) není periodická d) periodická 13.  $\frac{5}{6}\pi$ , nápověda: převedeme úhel do základního tvaru, úhel v základním tvaru je ve třetím kvadrantu, stejnou hodnotu má i úhel z druhého kvadrantu, což je hledaný úhel.
14.  $D(f) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ , průsečík s osou  $x$ :  $X\left[\frac{2}{3}, 0\right]$ , s osou  $y$ :  $Y\left[0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$  15. průsečík s osou  $x$ :  $X_1[1 + \sqrt{3}, 0]$ ,  $X_2[1 - \sqrt{3}, 0]$ , průsečík s osou  $y$ :  $Y[0, -2]$  16. funkce je předpis, který každému číslu z definičního oboru funkce přiřazuje právě jedno číslo z oboru hodnot.  $\rightarrow$  ke každému  $x$  existuje právě jedno  $y$  a) není funkce např. k číslu  $-2$  je přiřazeno číslo  $0$  i číslo  $3$ , což u funkce není možné b) ano  $D(f) = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $H(f) = \{1, 3\}$  a) ano  $D(f) = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$   $H(f) = \{3, 5, 6\}$  d) ano  $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$   $H(f) = \{0, 1, 3, 6\}$  17. Funkce se rovnají tehdy, jestliže platí:  $D(f) = D(g)$  a  $f(x) = g(x)$  pro každé  $x \in D(f)$  tj. ke každému  $x$  je přiřazeno při obou funkcích stejné  $y$ . a) nejsou si rovny,  $D(f) = D(g)$ , ale  $f(-2) = -2, g(-2) = 2 \rightarrow f(x) \neq g(x)$  b) ano c) nesou si rovny,  $f(x) = g(x)$ , ale  $D(f) = \mathbf{R} - \{-2, 1\}, D(g) = \mathbf{R} - \{1\} \rightarrow D(f) \neq D(g)$  d) ano
18. a)  $y = 2\pi x, x \in (0, \infty)$  b)  $y = \pi x^2, x \in (0, \infty)$  c)  $y = 4\pi x^2, x \in (0, \infty)$  d)  $y = \frac{4}{3}\pi x^3, x \in (0, \infty)$  e)  $y = 4x, x \in (0, \infty)$
- f)  $y = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}, x \in (0, \infty)$  g)  $y = x(1 + \sqrt{2}), x \in (0, \infty)$  h)  $y = x(2 + \sqrt{2}), x \in (0, \infty)$  19. a) sudá b) lichá c) lichá d) lichá  
e) lichá f) ani sudá, ani lichá g) sudá h) sudá i) sudá j) ani sudá, ani lichá k) lichá l) ani sudá, ani lichá (již z tohoto důvodu: k číslu  $-3$  neexistuje číslo opačné, které by leželo v definičním oboru funkce. 20. a) ani rostoucí, ani klesající, ani konstantní b) rostoucí c) klesající d) rostoucí e) klesající f) rostoucí g) konstantní h) ani rostoucí, ani klesající, ani konstantní i) ani rostoucí, ani klesající, ani konstantní j) rostoucí k) rostoucí l) klesající 21. abychom mohli vytvořit inverzní funkci, musí být daná funkce prostá: pro každé  $x_1 \neq x_2$  platí  $f(x_1) \neq f(x_2)$  tj. ke každému  $y$  z oboru hodnot dané funkce existuje právě jedno číslo  $x$ , které je jeho obrazem. a) prostá,  $f^{-1}: y = 2 - \frac{x}{4}$  b) není prostá, např.  $-2 \neq 2$  a zároveň  $g_1(-2) = g_2(2)$  tj. ke  $4$  existují  $2$  hodnoty  $x$ , nelze najít inverzní funkci c) prostá,  $g_2^{-1}: y = \sqrt{x}$  d) prostá,
- $h^{-1}: y = \frac{3+2x}{x-1}$  22. a)  $0$  b)  $-1$  c)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  d)  $-1$  23. a)  $x = -\frac{9}{2}$  b)  $x = -\frac{9}{4}$  c)  $x = \frac{9}{2}$  d)  $x = \frac{3}{2}$  e)  $x = \frac{9}{3s-4}, s \neq \frac{4}{3}$
- f)  $x = -0,9$  g)  $x = -9$  h)  $x = \frac{90}{23}$  i)  $x = -36$  24.  $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$

25.



26. a) všechny body ležící na ose y mají souřadnice  $[0, y]$ ,  $y \in \mathbf{R}$  b) všechny body ležící na ose x mají souřadnice  $[x, 0]$ ,  $x \in \mathbf{R}$  c) všechny body ležící na přímce rovnoběžné s osou x procházející bodem  $[0, 4]$  mají souřadnice  $[x, 4]$ ,  $x \in \mathbf{R}$  d) všechny body ležící na ose prvního a třetího kvadrantu mají souřadnice  $[x, x]$ ,  $x \in \mathbf{R}$  27. a)  $A[0, 2]$  b)  $B[-3, 0]$  c)  $C[-5, 5]$  d)  $D[0, 25; -\frac{79}{80}]$  e) takový bod neexistuje, leží-li bod na kladné poloose y  $\rightarrow$  musí platit souřadnice  $y > 0$ .

28. a)  $D(f_1) = \langle 0, \infty \rangle$  b)  $D(f_2) = \mathbf{R} - \left\{0, -\frac{7}{2}, 3\right\}$  c)  $D(f_3) = \mathbf{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$  29. a)  $D(f) = \mathbf{R}$  b)  $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$  c)  $D(f) = \mathbf{R} - \{0, 3\}$

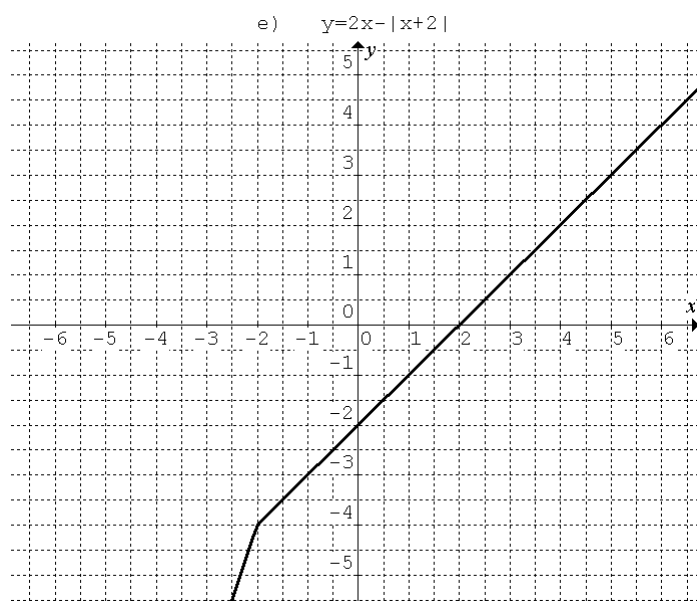
$y = \frac{(x-1)(2x+3)}{2x(x-3)}$  d)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ ,  $y = \frac{1}{4x}$  e)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-3\}$ ,  $y = 3(x-3)$  f)  $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $y = x + 1$  g)  $D(f) = \mathbf{R} - \left\{0, \pm \frac{1}{2}\right\}$

$y = \frac{-2(x^2 - 2x - 1)}{x(1-2x)(1+2x)}$  h)  $D(f) = \langle -2, 2 \rangle$  30. a) nejedná se o funkci, např. k číslu  $x = 2$  jsou přiřazeny dvě různé hodnoty y:

$y_1 = 2\sqrt{3}$ ,  $y_2 = -2\sqrt{3}$  b) jedná se o funkci c) nejedná se o funkci, např. k číslu  $x = 1$  jsou přiřazeny dvě různé hodnoty y:

$y_1 = -3$ ,  $y_2 = 3$  d) jedná se o funkci e) nejedná se o funkci, např. k číslu  $x = 1$  jsou přiřazeny dvě různé hodnoty y:  $y_1 = \sqrt{3}$

$y_2 = -\sqrt{3}$  31. např. k číslu  $x = 4$  jsou přiřazeny všechny násobky 4 tj. k jednomu x je přiřazeno více než jedno y  $\rightarrow$



nejedná se o funkci 32. a)  $D(m) = \mathbf{R} - \{3\}$ ,  $D(n) = \mathbf{R} - \{0, 1\}$ ,

$D(g) = \mathbf{R}$  b) m:  $m(5) = \frac{3}{2}$ ,  $m(0) = \frac{2}{3}$ ,  $m\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{10}$ ,

n:  $n(5) = -1$ ,  $n(0)$  neexistuje, protože 0 není prvkem

definičního oboru,  $n\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$  g:  $g(5) = 9$ ,  $g(0) = 4$ ,

$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{49}{9}$  c) m:  $m\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{5}$ ,  $m(2) = 0$ ,  $m\left(\frac{8}{3}\right) = -2 \rightarrow$

$\frac{2}{5}, 0, -2 \in H(m)$ ,  $1 \notin H(m)$ , n: funkci si můžeme

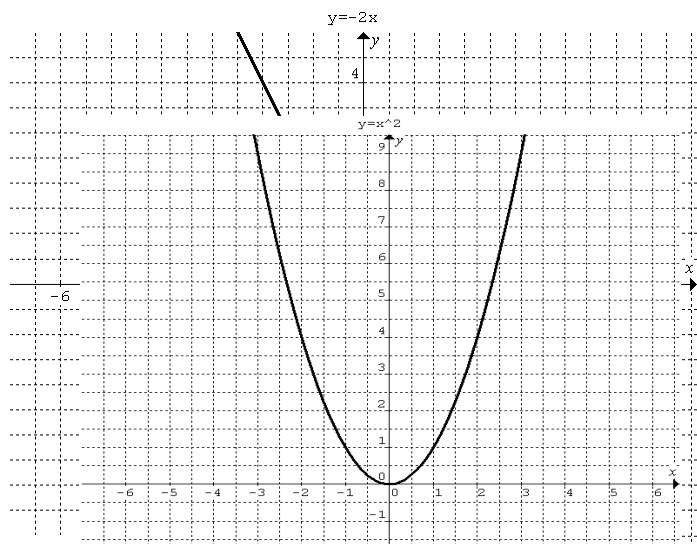
zjednodušit:  $y = \frac{4}{1-x}$ , ale definiční obor je stále  $D(n) = \mathbf{R} - \{0, 1\}$ ,  $n(-9) = \frac{2}{5}$ ,  $n(-3) = 1$ ,  $n(3) = -2 \rightarrow$

$\frac{2}{5}, 1, -2 \in H(n)$ ,  $0 \notin H(n)$ , g:  $g(2) = 0$ ,  $g\left(\frac{10 \pm \sqrt{10}}{5}\right) = \frac{2}{5}$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g(3) = 1 \rightarrow \frac{2}{5}, 0, 1 \in H(g)$ ,  $-2 \notin H(g)$  33. a) klesající,

lichá b) rostoucí, lichá c) ani rostoucí, ani klesající, ani konstantní, ani lichá, ani sudá d) ani sudá, ani lichá, rostoucí e) ani sudá, ani lichá, rostoucí viz graf. f) není ani rostoucí ani klesající, ani konstantní, není ani lichá ani sudá

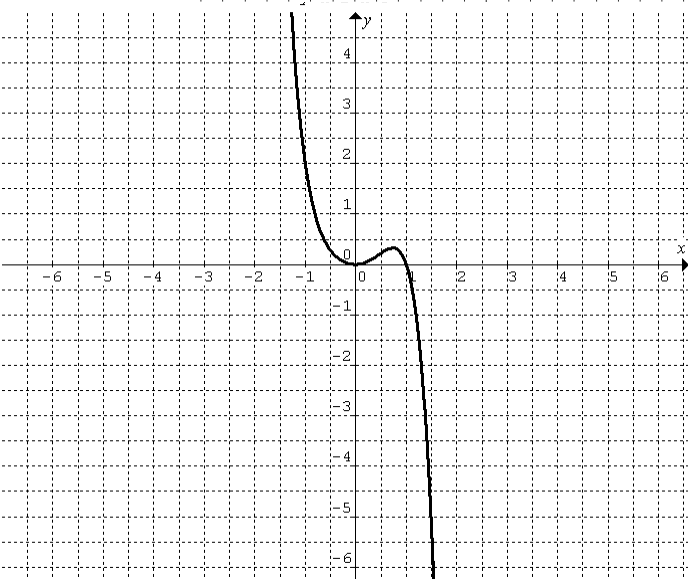
34. a) cílem tohoto příkladu není konkrétně zadat funkci jejím předpisem, ale zadat funkci pomocí grafu:

a) např.  $y = -2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$



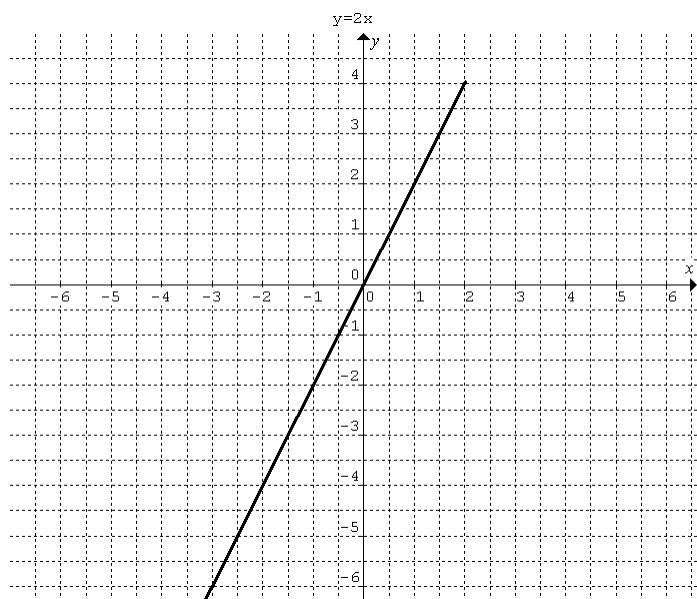
b) např.  $y = x^2 - x^5, x \in \mathbb{R}$

d) např.  $y = x^2, x \in \mathbb{R}$



c) např.  $y = 2x, x \in (-\infty, 2)$

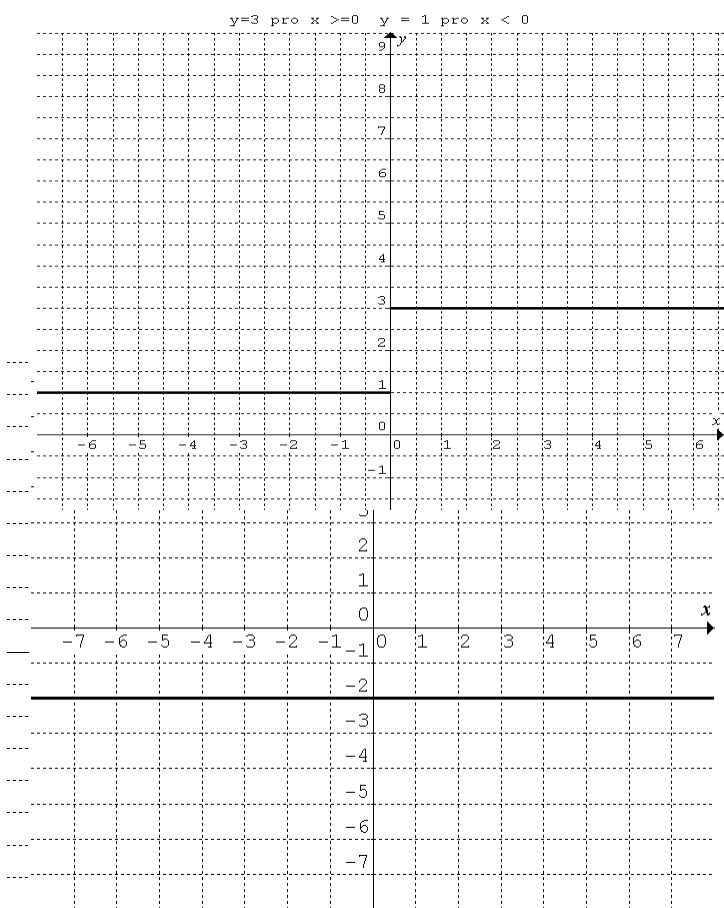
e) např.  $y =$



3 pro

$x \in \langle 0, \infty \rangle$

1 pro  $x \in (-\infty, 0)$



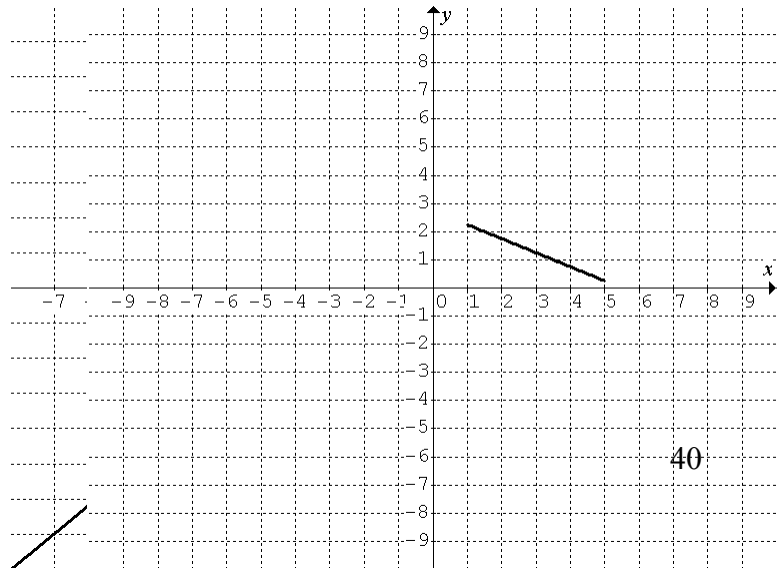
35. a)  $H(f) = \mathbb{R}$  b)  $H(f) = \mathbb{R}^+$  c)  $H(f) = \{2, 4, 5\}$  d)  $H(f) =$

$\{-1, 1, 3, 7\}$  e)  $H(f) = \langle 7, 43 \rangle$  f)  $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

36. viz. grafy, nápověda: e) převedeme na zápis ve

tvaru  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{4}$

f)  $y = -0.5x + 2.75$   $D(f) = \langle 1, 5 \rangle$



- 37.** Označení:  $X$  – průsečík grafu s osou  $x$ ,  $Y$  – průsečík grafu s osou  $y$  a)  $X\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$ ,  $Y[0, 3]$ ,  $A[-2, -1]$  b)  $X\left[\frac{9}{35}, 0\right]$ ,  $Y\left[0, -\frac{3}{5}\right]$ ,  $A\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$  c)  $X_1[5, 0]$ ,  $X_2[-5, 0]$ ,  $Y[0, -125]$ ,  $A_1[\sqrt{6}, 5]$ ,  $A_2[-\sqrt{6}, 5]$  d)  $X\left[\frac{3}{2}, 0\right]$ ,  $Y[0, 1]$ ,  $A\left[-4, \frac{11}{3}\right]$  **38.**  $C, D \notin f$ ,  $E \in f$  b)  $C \notin g$ ,  $D, E \in g$  c)  $C \in h$ ,  $D \notin h$  d)  $C \notin h_1$ ,  $D \in h_1$  **39.** nápověda: dosadíme  $x$ -ovou souřadnici bodu do předpisu dané funkce, nalezneme  $f(x)$ , pokud se  $f(x)$  rovná  $y$ -ové souřadnici daného bodu, leží bod na grafu funkce, pokud je souřadnice  $y$  daného bodu větší než  $f(x)$ , leží bod nad grafem funkce a pokud je souřadnice  $y$  daného bodu menší než  $f(x)$ , pak leží bod pod grafem dané funkce a) leží pod grafem b) bod leží nad grafem c) bod leží na grafu **40.** a)  $[7,5; 0]$  b)  $[0, 3]$  c)  $\left[\frac{25}{17}, \frac{41}{17}\right]$  d)  $[-5, 5]$  e)  $[10, -1]$  **41.** a) prostá b) prostá c) není prostá, např.  $f(-2) = f(2) = 3 \rightarrow$  k číslu 3 existují dvě různá  $x$ , kterým je právě číslo 3 v dané funkci přiřazeno d) není prostá, např.  $f(\sqrt{10}) = f(-\sqrt{10}) = 9$  e) prostá **42.** a)  $D(f) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \cup \langle 3, \infty \rangle$  b)  $D(f) = \langle 0, 2 \rangle$  c)  $D(f) = (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$  d)  $D(f) = (1, \infty)$  e)  $D(f) = (-2, 0) \cup (0, 1)$  f)  $D(f) = \langle -2, 5 \rangle$  g)  $D(f) = (-\infty, -3) \cup \langle 0, 3 \rangle$  h)  $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 3\}$  **43.** a)  $a \in (2, \infty)$  b)  $a \in \left(\frac{27}{8}, \infty\right)$  **44.** a)  $D(f) = \langle -2, 4 \rangle$  b) s osou  $x$ :  $X_1[4, 0]$ ,  $X_2[= 2, 0]$ , s osou  $y$ :  $Y[0, 2]$