ELIPSA - ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

ZADÁNÍ:

1. Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $E[-3;2], F[3;2]$ a hlavní poloosu délky 5.
2. Napište rovnici elipsy, která má ohniska $E[-2;6], F[-2;-2]$ a hlavní vrchol $C[-2;7]$.
3. Napište rovnici elipsy, která má ohnisko $E[3;-2]$ a vedlejší vrcholy $C[6;2], D[6;-6]$.
4. Napište obecnou rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, dotýká se osy x i osy y a její střed je v bodě $S[2;-4]$.
5. Napište rovnici elipsy, která se dotýká osy x v bodě $X[-4;0]$ a osy y v bodě $Y[0;-3]$.
6. Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, střed $S[-3;1]$ a prochází body $K[9;9]$, $L[13;-5]$.
7. Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou x, střed $S[2;1]$, hlavní poloosa je dvakrát delší než vedlejší poloosa a elipsa prochází počátkem soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ:

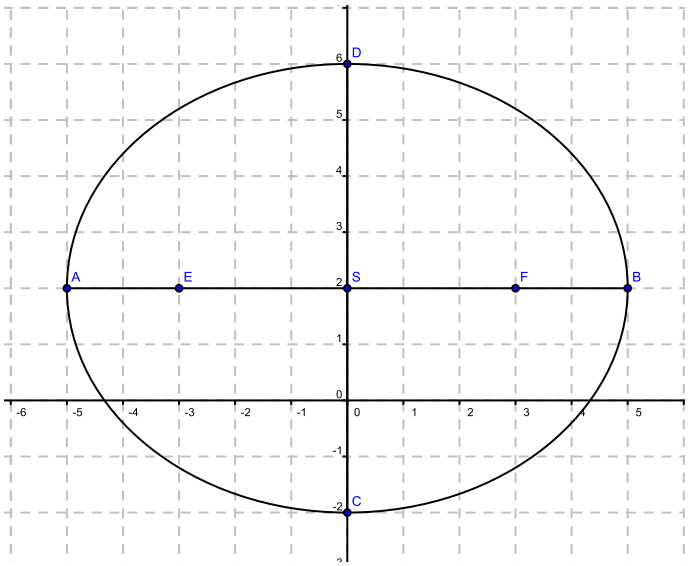
1. Střed S elipsy je středem úsečky EF.

$$S = \frac{E+F}{2}$$
$$S[0;2]$$

Ohniska mají stejnou y-ovou souřadnici, leží tedy na přímce rovnoběžné s osou x, ta je zároveň hlavní osou elipsy. Délka hlavní poloosy je zadána, $a = 5$. Platí:

$$e = |SE| = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-2)^2} = 3$$
$$a^2 = b^2 + e^2$$
$$25 = b^2 + 9$$
$$b^2 = 16$$
$$b = 4$$

Rovnice elipsy, $e : \frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$
Elipsa má zbývající vrcholy: $A[-5;2], B[5;2], C[0;-2], D[0;6]$.



2. Střed S elipsy je středem úsečky EF.

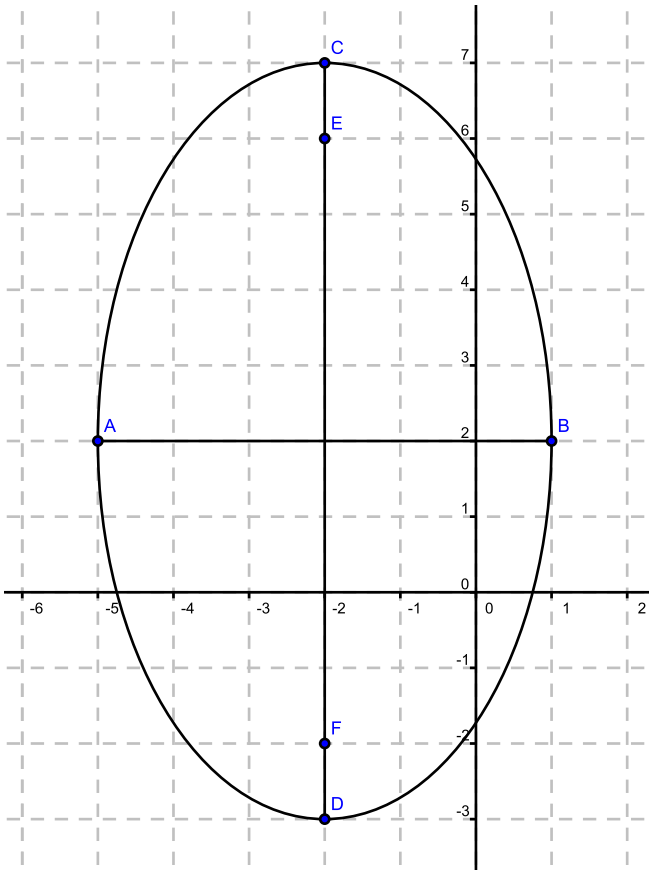
$$S = \frac{E+F}{2}$$
$$S[-2;2]$$

Ohniska mají stejnou x-ovou souřadnici, leží tedy na přímce rovnoběžné s osou x, ta je zároveň hlavní osou elipsy.
Platí:

$$b = |SC| = \sqrt{(-2+2)^2 + (7-2)^2} = 5$$
$$e = |SE| = \sqrt{(-2+2)^2 + (6-2)^2} = 4$$

$$b^2 = a^2 + e^2$$
$$25 = a^2 + 16$$
$$a^2 = 9$$
$$a = 3$$

Rovnice elipsy, $e : \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
Elipsa má zbývající vrcholy: $A[-5; 2], B[1; 2], D[-2; -3]$.



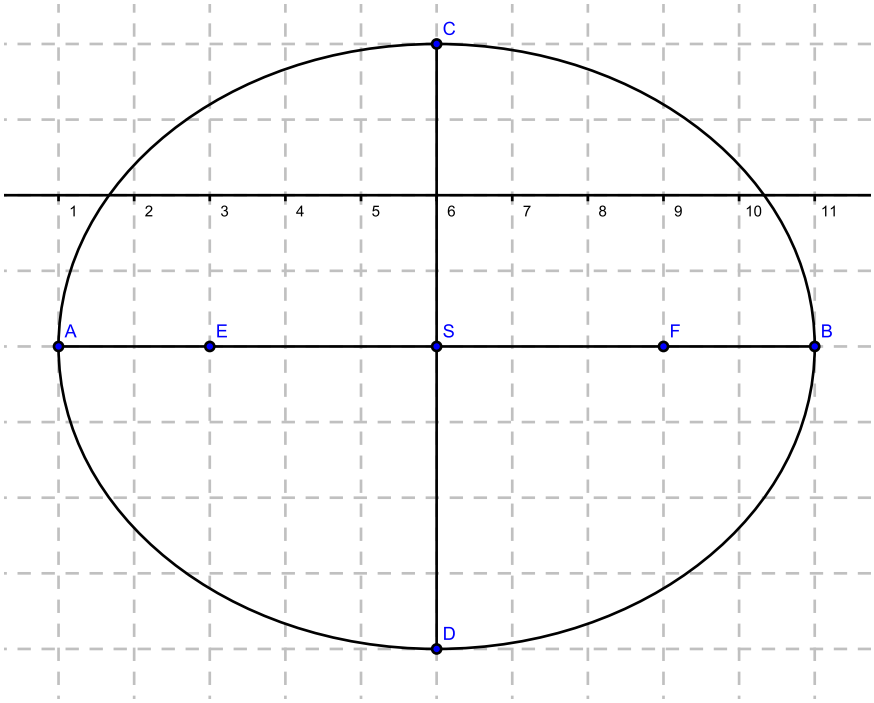
3. Známe jedno z ohnisek a vedlejší vrcholy C, D.
Střed S elipsy je středem úsečky CD.

$$S = \frac{C + D}{2}$$
$$S[6; -2]$$

Platí:

$$e = |ES| = \sqrt{(6-3)^2 + (-2+2)^2} = 3$$
$$b = |CS| = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-2)^2} = 4$$
$$a^2 = b^2 + e^2$$
$$a^2 = 16 + 9 = 25$$
$$a = 5$$

Rovnice elipsy, $e : \frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
Elipsa má zbývající vrcholy: $A[1; -2], B[11; -2], F[9; -2]$.



4. Známe střed $S[2;-4]$. Osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic a elipsa se obou os dotýká. Z náčrtku je zřejmé, že body dotyku jsou $A[0;-4], C[2;0]$. Dále je možné z náčrtku odvodit:

$$b = |CS| = 4$$

$$a = |AS| = 2$$

Elipsa má rovnici, $e : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$.
Určíme obecnou rovnici elipsy:

$$e : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1 \ /16$$

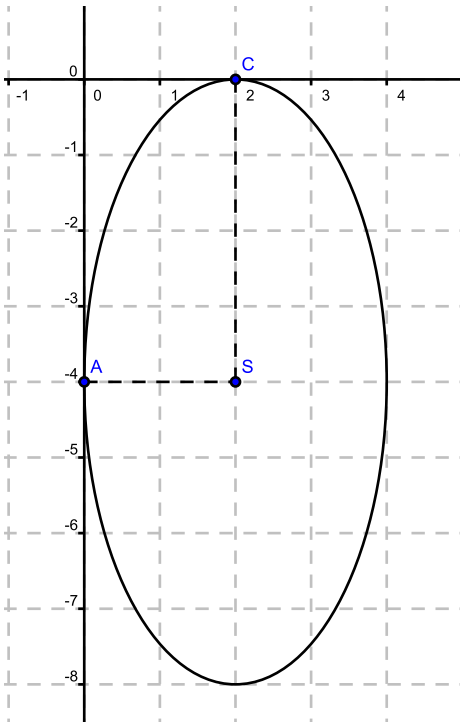
$$4(x-2)^2 + (y+4)^2 = 16$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + y^2 + 8y + 16 = 16$$

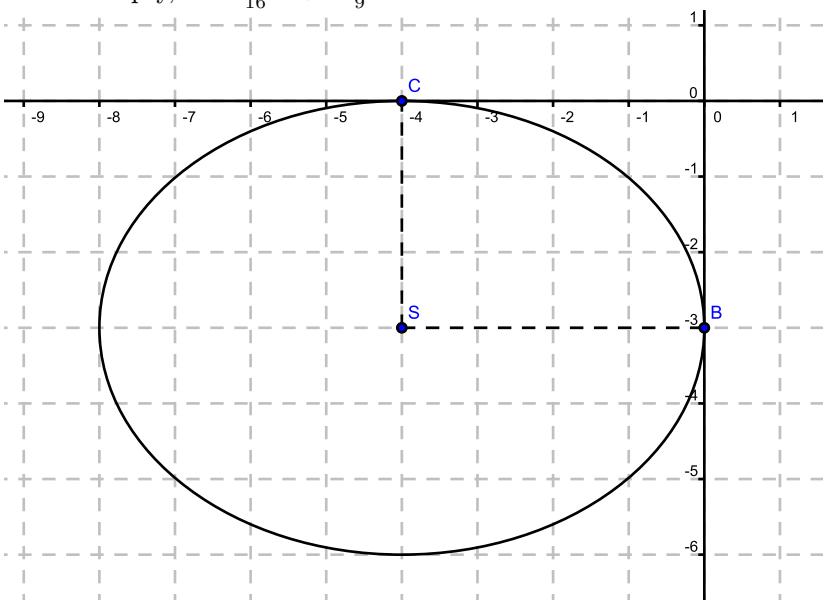
$$4x^2 - 16x + 16 + y^2 + 8y + 16 = 16$$

Obecná rovnice:

$$4x^2 + y^2 - 16x + 8y + 16 = 0$$



5. Body dotyku jsou vrcholy elipsy. Z náčrtku je zřejmé, že $S[-4;-3]$, $a=4$, $b=3$.
Rovnice elipsy, $e: \frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$



6. Protože známe střed elipsy, můžeme napsat neúplný tvar rovnice elipsy:

$$e: \frac{(x+3)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$$

Body K, L jsou body elipsy, proto jejich souřadnice musí vyhovovat rovnici elipsy:

$$K \in e: \frac{12^2}{a^2}+\frac{8^2}{b^2}=1 \ /a^2b^2$$

$$144b^2+64a^2=a^2b^2$$

$$L \in e: \frac{16^2}{a^2}+\frac{8^2}{b^2}=1 \ /a^2b^2$$

$$256b^2+36a^2=a^2b^2$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: Řešíme sčítací metodou tak, aby vypadlo a^2b^2. Ze získané rovnice vyjádříme jednu z neznámých a dosadíme do jedné z rovnic soustavy.

$$144b^2+64a^2=a^2b^2 \ /(-1)$$

$$256b^2+36a^2=a^2b^2$$

$$- -$$

$$112b^2-28a^2=0$$

$$a^2=\frac{112}{28}b^2$$

$$a^2=4b^2$$

$$a=2b$$

Dosadíme do jedné z rovnic soustavy, např. do první rovnice:

$$144b^2+64(4b^2)=4b^{22}$$

$$144b^2+256b^2=4b^4$$

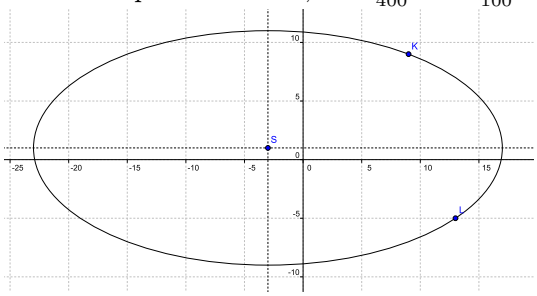
$$400b^2=4b^4$$

$$100b^2=b^4$$

$$b^4-100b^2=0$$

$$b^2(b^2-100)=0$$

Dostali jsme rovnici v součinovém tvaru: Proto $b^2 = 0$ nebo $b^2 - 100 = 0$.
$b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$. Toto řešení nevyhovuje, protože b je délka vedlejší poloosy, tj. $b > 0$.
$b^2 - 100 = 0 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = \pm 10$. Opět, protože b musí být číslo kladné, vyhovuje pouze $b = 10$.
Dopočítáme a: $a^2 = 4b^2 \Rightarrow a^2 = 400,\ a = 20$.
Hledaná elipsa má rovnici, $e : \frac{(x+3)^2}{400} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$.



7. Ze zadání víme, že střed $S[2;1]$ a pro hlavní poloosu a platí: $a = 2b$.
Rovnice elipsy, $e : \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$
Dosadíme $a = 2b$.

$$\frac{(x-2)^2}{4b^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1,\ / \cdot 4b^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4(y^2 - 2y + 1) = 4b^2$$

Bod $O[0;0]$ je bodem elipsy:

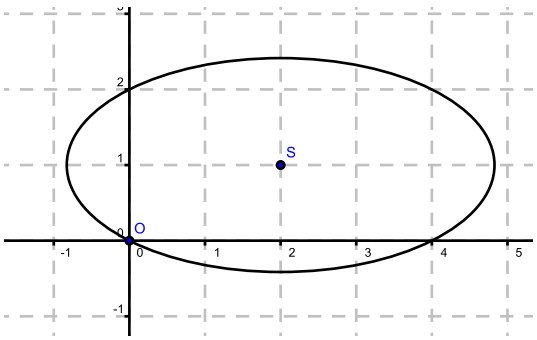
$$O : 0 - 0 + 4 + 4(0 - 0 + 1) = 4b^2$$

$$8 = 4b^2$$

$$b^2 = 2$$

Dopočítáme a^2:

$$a^2 = 4b^2 = 8$$

.

Elipsa má rovnici, $e : \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$.