

PRAVDĚPODOBNOST - DRUHÁ ČÁST

- opačný jev, nezávislé jevy (násobení pravděpodobností), nezávislé pokusy, binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma), podmíněné pravděpodobnosti.

OPAČNÝ JEJ

1. Střelec střílí se spolehlivostí (tj. s pravděpodobností zásahu) 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že při první ráně nezasáhne cíl?

ŘEŠENÍ:

Jev A' - zasáhne cíl, $P(A') = 0,9$. Jev A - nezasáhne cíl, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,9 = 0,1$.

2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet nejvýš deset? (Využijte opačného jevu).

ŘEŠENÍ:

Jev A - padne součet nejvýše deset. Jev A' - padne součet 11 nebo 12. $A' = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$. Všechny možnosti $m = 6 \cdot 6 = 36$. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{36} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0,91\bar{6}$.

3. Mezi dvaceti výrobky jsou čtyři vadné. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodné kontrole tří výrobků bude alespoň jeden vadný? (Využijte opačného jevu.)

ŘEŠENÍ:

Jev A - alespoň jeden vadný. Jev A' - žádný vadný. Počet všech možností, jak vybrat tři výrobky z dvaceti, $m = \binom{20}{3} = 1140$. $m(A') = \binom{16}{3} = 560$, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{560}{1140} = 1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57} = 0,509$.

4. Ve třídě je 30 žáků, z nichž 5 nevypracovalo domácí úkol. V hodině budou vyvoláni k tabuli 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jeden žák bez domácího cvičení? (Využijte opačného jevu).

ŘEŠENÍ:

Jev A - alespoň jeden žák bez domácího cvičení. Jev A' - žádný žák bez domácího cvičení. Počet všech možností, jak vybrat 4 žáky z třiceti je: $m = \binom{30}{4} = 27405$. $m(A') = \binom{25}{4} = 12650$. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{12650}{27405} = 0,538$.

NEZÁVISLÉ JEJY, NEZÁVISLÉ POKUSY (NÁSOBENÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ)

5. Střelec střílí se spolehlivostí 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne cíl dvakrát za sebou?

ŘEŠENÍ:

Z - zasáhne cíl, $P(Z) = 0,9$. Střelec střílí dvakrát, jedná se o dva nezávislé pokusy: $P(A) = P(Z, Z) = P(Z) \cdot P(Z) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81$.

6. Při výrobě určitého výrobku musí být provedeny postupně tři náročné operace, jejichž dlouhodobě sledované úspěšnosti jsou 90%, 89% a 85%. Jaká je při tomto postupu pravděpodobnost zhotovení kvalitního výrobku?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o tři nezávislé pokusy: $P(A) = 0,9 \cdot 0,89 \cdot 0,85 = 0,681$.

7. Systém se skládá z deseti nezávislých prvků, z nichž každý má spolehlivost 99%. Jaká je spolehlivost systému? (Systém pracuje, pracují-li všechny jeho prvky.)

ŘEŠENÍ:

Jedná se o nezávislé pokusy, pravděpodobnosti násobíme: $P(A) = 0,99^{10} = 0,904$.

8. Při výstupní kontrole byly sledovány dva nezávislé kvalitativní ukazatele A a B. Jestliže výrobek nesplňoval některý z nich, byl vyřazen. Výstupní kontrolou prošlo 93,1% výrobků, přičemž ukazatel A splňovalo 98% výrobků. Kolik výrobků splňovalo ukazatel B?

ŘEŠENÍ:

Splnění ukazatelů A, B jsou nezávislé pokusy. Pro splnění obou platí: $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$. $0,931 = P(B) \cdot 0,98$, $P(B) = \frac{0,931}{0,98} = 0,95$, $P(B) = 95\%$. 95% výrobků splňuje ukazatel B.

9. Na cestě automobilu jsou 4 křižovatky se semaforey, pravděpodobnost průjezdu každou z nich je 0,5. Určete:
a) jaká je pravděpodobnost, že automobil projede všemi křižovatkami bez zastavení. b) jaká by musela být pravděpodobnost průjezdu jednou křižovatkou, aby pravděpodobnost průjezdu čtyřmi křižovatkami bez zastavení byla 0,5.

ŘEŠENÍ:

Projetí čtyřmi křižovatkami jsou nezávislé pokusy. a) $P(A) = 0,5^4 = 0,0625$ b) $P(A) = a^4 = 0,5$, $a = \sqrt[4]{0,5} = 0,841$ Pravděpodobnost průjezdu jednou křižovatkou by musela 0,841.

10. Systém se skládá ze dvou nezávislých prvků, z nichž každý má spolehlivost 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že v systému budou pracovat:

a) oba prvky b) žádný prvek c) alespoň jeden z prvků.

ŘEŠENÍ:

Jedná se o nezávislé pokusy. a) $P(A) = 0,8^2 = 0,64$ b) $P(A) = 0,2^2 = 0,04$ c) opačný jev - žádný z prvků: $P(A) = 1 - 0,04 = 0,96$ nebo lze postupovat i takto: alespoň jeden z prvků = jeden nebo oba. Jeden - vybereme jeden, který bude pracovat a druhý nebude pracovat. $P(A) = \binom{2}{1} 0,8 \cdot 0,2 = 0,32 + 0,64 = 0,96$.

11. Do všech místností v budově instalovali větrací okénka a ventilátory. Pravděpodobnost vadného větracího okénka je 0,2, vadného ventilátoru 0,1. Jaká je pravděpodobnost, že v dané místnosti se aspoň jedno z uvedených zařízení dá použít?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o nezávislé pokusy. Využijeme opačného jevu tj. žádné z uvedených zařízení se nedá použít. $P(A) = 1 - 0,2 \cdot 0,1 = 0,2$.

12. V elektrickém obvodu je zapojeno paralelně 8 žárovek. Pravděpodobnost, že žárovka bude svítit, je u každé z nich 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že bude svítit aspoň jedna z nich?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o nezávislé pokusy. Využijeme opačného jevu tj. žádná žárovka nesvítí. $P(A) = 1 - 0,1^8 = 0,9$.

13. Ze série 150 kusů výrobků vyhovělo při předběžné kontrole 135 kusů a z těchto 135 kusů při výstupní kontrole obstálo 117 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, který obstál při předběžné kontrole, obstál i při výstupní kontrole?

ŘEŠENÍ:

Vycházíme pouze z počtu: $P(A) = \frac{117}{135} = 0,86$.

14. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně napsaný zlomek můžeme krátit dvěma?

ŘEŠENÍ:

Čitatel i jmenovatel musí být číslo sudé. Vybíráme číslo pro čitatele i jmenovatele, výběry představují nezávislé pokusy tj. $P(A) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

15. Ze všech vyrobených kusů vyhovělo při výstupní kontrole 95% výrobků. Z každé série 100 kusů vyhovujících výrobků je průměrně 80% výrobků první kvality. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek je první kvality?

ŘEŠENÍ:

Jev V - výrobek je vyhovující, $P(V) = 0,95$. Určíme, jaká je pravděpodobnost, že ze všech výrobků, nejen vyhovujících, získáme výrobek první kvality. $P(1) = 0,8$. Poté $P(A) = P(V, 1) = P(V) \cdot P(1) = 0,95 \cdot 0,8 = 0,76$.

16. V osudí je 5 červených a 7 zelených koulí. Provedeme dva tahy po sobě po jedné kouli, přičemž po prvním tahu kouli do osudí a) vracíme b) nevracíme. Jaká je pravděpodobnost, že obě vytažené koule budou červené?

ŘEŠENÍ:

Tahy jsou nezávislými pokusy, jednotlivé pravděpodobnosti násobíme: a) $P(A) = \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{5}{12}\right) = \frac{25}{144} = 0,1736$ b) Nyní postupujeme přes klasickou pravděpodobnost: $P(A) = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = 0,1515$.

17. V jednom osudí je 6 bílých a 4 černé koule, ve druhé 7 bílých a 5 černých koulí. Vytáhneme-li z každého osudí po jedné kouli. Jaká je pravděpodobnost, že budou obě koule černé?

ŘEŠENÍ:

Tahy z různých osudí jsou nezávislými pokusy, jednotlivé pravděpodobnosti násobíme. $P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{6} = 0,16$.

18. Jaká je pravděpodobnost, že při hře dvěma hracími kostkami padne druhým vrhem součet a) 7 b) 8?

ŘEŠENÍ:

Oba vrhy jsou nezávislé pokusy, přičemž v prvním hodu daný jev nenastane a nastane až v druhém hodu. a) B - součet 7: $B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$, $m(B) = 6$, $P(B) = \frac{6}{36}$, $P(A) = (1 - P(B)) \cdot P(B) = \frac{30}{36} \cdot \frac{6}{36} = 0,138$. b) B - součet 8: $B = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$, $P(B) = \frac{5}{36}$, $P(A) = (1 - P(B)) \cdot P(B) = \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{36} = 0,1196$.

19. Jaká je pravděpodobnost, že při prvním hodu čtyřmi mincemi padnou 2 líce a při druhém hodu 3 líce?

ŘEŠENÍ:

Při hodu čtyřmi mincemi máme $4^2 = 16$ možností. Oba hody jsou nezávislé pokusy, proto pravděpodobnosti budeme násobit. C - padnou dva líce, $m(C) = \binom{4}{2} = 6$, D - padnou 3 líce, $m(D) = \binom{4}{3} = 4$. Platí: $P(A) = P(B) \cdot P(C) = \frac{6}{16} \cdot \frac{4}{16} = \frac{3}{32} = 0,09375$.

20. Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu třemi hracími kostkami padne na všech kostkách sudé číslo?

ŘEŠENÍ:

Vrhy jsou nezávislými pokusy, pravděpodobnosti jsou všechny stejné a budeme je násobit. $P(A) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.

21. Jaká je pravděpodobnost, že a) dvakrát, b) třikrát, c) čtyřikrát po sobě hodíme hrací kostkou liché číslo?

ŘEŠENÍ:

Vrhy jsou nezávislými pokusy, pravděpodobnosti jsou všechny stejné a budeme je násobit: a) $P(A) = 0,5^2 = 0,25$ b) $P(A) = 0,5^3 = 0,125$ c) $P(A) = 0,5^4 = 0,0625$.

BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ

22. V autobusových garážích je 10 autobusů. Všechny se denně kontrolují, přičemž pravděpodobnost, že autobus bude v daném dni schopný provozu, je 0,8. Určete pravděpodobnost, že v daném dni:

a) bude právě 6 autobusů schopných provozu b) budou aspoň 4 autobusy schopné provozu.

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,8$, $P(n) = 0,2$. a) $\binom{10}{6} \cdot 0,8^6 \cdot 0,2^4 = 0,088$ b) využijeme opačného jevu, tj. nejvýše tři autobusy budou schopné provozu: $P(A) = 1 - P(A')$, $P(A') = 0,2^{10} + \binom{10}{1} 0,8 \cdot 0,2^9 + \binom{10}{2} 0,8^2 \cdot 0,2^8 + \binom{10}{3} 0,8^3 \cdot 0,2^7 = 0,000864$, $P(A) = 0,999135$.

23. Klíčivost semen určitého druhu fazolí je 0,98. K pokusným účelům bylo zasazeno 10 semen. Jaká je pravděpodobnost, že z nich

a) vyklíčí právě 8 b) nevyklíčí ani jedno?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,98$, $P(n) = 0,02$. a) $P(A) = \binom{10}{8} 0,98^8 \cdot 0,02^2 = 0,0153$. b) $P(A) = 0,02^{10} = 1,024 \cdot 10^{-17}$.

24. Hoďme 100krát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) šestka padne právě dvacetkrát. b) šestka padne aspoň čtyřikrát?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = \frac{1}{6}$, $P(n) = \frac{5}{6}$.

a) $P(A) = \binom{100}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{80} = 0,0679$. b) využijeme opačného jevu: šestka padne nejvýše třikrát. $P(A') = \left(\frac{5}{6}\right)^{100} + \binom{100}{1} \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{99} + \binom{100}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{98} + \binom{100}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{97} = 0,000018264$. $P(A) = 1 - P(A') = 0,99998$.

25. Střelec, u něhož pravděpodobnost zásahu cíle je 0,8, střílí šestkrát za sebou. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň čtyřikrát zasáhne cíl?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,8$, $P(n) = 0,2$.

Využijeme opačného jevu, tj. zasáhne cíl nejvýše třikrát. $P(A') = 0,2^6 + \binom{6}{1} 0,2^5 \cdot 0,8 + \binom{6}{2} 0,2^4 \cdot 0,8^2 + \binom{6}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^3 = 0,09888$, $P(A) = 1 - P(A') = 0,90112$.

26. Lék, který léčí úspěšně 80 procent případů, dáme 10 pacientům. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň 7 z nich se vyléčí?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,8$, $P(n) = 0,2$.

$P(A) = \binom{10}{7} 0,8^7 \cdot 0,2^3 + \binom{10}{8} 0,8^8 \cdot 0,2^2 + \binom{10}{9} 0,8^9 \cdot 0,2 + \binom{10}{10} 0,8^{10} = 0,879$.

27. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,51. Jaká je pravděpodobnost, že rodina se čtyřmi dětmi má

a) aspoň tři děvčata b) aspoň jednoho chlapce?

ŘEŠENÍ:

a) $P(A) = \binom{4}{3} 0,51 \cdot 0,49^3 + \binom{4}{4} 0,49^4 = 0,298$ b) využijeme opačného jevu tj. žádný chlapec: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \binom{4}{4} 0,49^4 = 0,942$.

28. Střelec zasáhl cíl 92 krát ze 100 výstřelů.

a) Jaká je pravděpodobnost jednoho zásahu cíle? b) S jakou pravděpodobností střelec cíl nezasáhne?

- c) Jaká je pravděpodobnost, že při dvou pokusech zasáhl cíl právě dvakrát? d) Jaká je pravděpodobnost, že při třech pokusech zasáhl cíl alespoň jedenkrát?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,92$, $P(n) = 0,08$.

- a) $P(A) = P(z) = 0,92$ b) $P(A) = 1 - P(z) = 0,08$ c) $P(A) = 0,92^2 = 0,8464$ d) využijeme opačného jevu, tj. nezasáhl ani jednou. $P(A) = 1 - 0,08^3 = 0,9995$.

29. Střelec zasáhne cíl v průměru osmkrát z deseti ran.

- a) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň jedenkrát ze tří ran? b) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň dvakrát ze tří ran?

- c)* Kolikrát musí střelit, aby zasáhl cíl alespoň jednou s pravděpodobností, která je větší než 99%?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,8$, $P(n) = 0,2$.

- a) využijeme opačného jevu, nezasáhne cíl ani jednou. $P(A) = 1 - 0,2^3 = 0,992$ b) $P(A) = \binom{3}{2} 0,8^2 \cdot 0,2 + \binom{3}{3} 0,8^3 = 0,896$ c) Sestavíme nerovnici z neznámou k - počet střel.

$$1 - 0,2^k > 0,99$$

$$0,2^k < 0,01 / \log$$

$$k \cdot \log 0,2 < \log 0,01 / : \log 0,2$$

Pozor, dělíme záporným číslem, musíme otočit znaménko nerovnosti:

$$k > 2,86$$

Musíme střelit nejméně třikrát.

30. Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První střelec zasáhne cíl s pravděpodobností 0,6, druhý s pravděpodobností 0,8. Každý vystřelí právě jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) žádný z nich nezasáhl cíl b) právě jeden zasáhl cíl c) oba dva zasáhli cíl d) Jaký výsledek dostaneme, sečteme-li pravděpodobnosti z úloh a) až c).

ŘEŠENÍ:

Jedná se o nezávislé pokusy, pravděpodobnosti budeme násobit. a) $P(A) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$ b) $P(A) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,44$ c) $P(A) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$ d) V prvních třech variantách jsme vyčerpali všechny možnosti, tj. sečteme-li všechny pravděpodobnosti dostaneme číslo 1, tj. jev jistý.

31. V porotě jsou tři členové. Dva z nich rozhodují s pravděpodobností 0,95 správně, třetí rozhoduje tak, že si hodí mincí. Jaká je pravděpodobnost, že celá porota rozhodne správně (tj. rozhodnou správně alespoň dva porotci)?

ŘEŠENÍ:

Alespoň dva porotci, rozhodují nezávisle, pravděpodobnosti budeme násobit. $P(A) = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,5 + 0,95 \cdot 0,05 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,95 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,05 \cdot 0,5 = 0,95$.

32. Žárovka svítí se spolehlivostí 92%. Jaká je spolehlivost zařízení, ve kterém jsou tři žárovky zapojeny sériově?

ŘEŠENÍ:

Jedná se o binomické rozdělení, pokus má dva možné výsledky: $P(z) = 0,92$, $P(n) = 0,08$.

Zařízení je funkční svítí-li všechny tři žárovky, jinak nepracuje: $P(A) = 0,92^3 = 0,779$

PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

33. Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu hrací kostkou nepadne číslo 2, ale liché číslo?

ŘEŠENÍ:

Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo (B) za podmínky, že nepadne číslo 2 (C). Vybíráme tedy pouze z 5 čísel tj. $P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$. Počítat můžeme i přes vzorec: $P(A) = P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5} = 0,6$.

34. Jaká je pravděpodobnost, že ze hry o 32 kartách vytáhneme druhým tahem eso (taháme po jedné kartě)?

ŘEŠENÍ:

Známe pravděpodobnost, že v druhém tahu bylo vytaženo eso (A) za podmínky, že nebylo vytaženo eso v prvním tahu (B): $P(A|B) = \frac{28 \cdot 4}{32 \cdot 31}$. Přitom pravděpodobnost toho, že nebylo vytaženo eso v prvním tahu je: $P(B) = \frac{28 \cdot 31}{32 \cdot 31}$. Platí: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Odtud $P(A \cap B)$ tj. v druhém tahu je vytaženo eso a v prvním tahu není vytaženo eso je: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{28 \cdot 31}{32 \cdot 31} \cdot \frac{28 \cdot 4}{32 \cdot 31} = 0,1129$.

35. Při hodech hrací kostkou sledujeme jevy:

A - "padne sudé číslo", B - "padne číslo menší než 5", C - "padne číslo větší než 3". Vypočtete podmíněné pravděpodobnosti a) $P(A|B)$ b) $P(A|C)$ c) $P(B|C)$.

ŘEŠENÍ:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(C) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(A \cap C) = \frac{1}{3}, P(B \cap C) = \frac{1}{6}. \quad \text{a)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 0,5 \quad \text{b) } P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0,6 \quad \text{c) } P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = 0,3$$

36. V osudí máme 5 bílých lístků a 4 barevné lístky stejného tvaru. Vytáhneme náhodně postupně dva lístky, přičemž po prvním tahu se lístek vrací do osudí. Určete:

a) pravděpodobnost, že 2. tažený lístek bude bílý (A_2). b) pravděpodobnost, že oba tažené lístky budou bílé ($A_1 \cap A_2$)

c) podmíněnou pravděpodobnost, že při 2.tahu se vytáhne bílý lístek, jestliže při prvním tahu byl vytažen bílý lístek ($A_2|A_1$).

ŘEŠENÍ:

$$\text{a) jedná se o nezávislé pokusy } P(A_2) = \frac{9}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9} = 0,5. \quad \text{b) } P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81} = 0,3086$$

$$\text{c) } P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{25}{81}}{\frac{5}{9}} = \frac{5}{9} = 0,5.$$

37. V telefonní ústředně je ze 120 drátů 75 modrých a z těch je zapojených 54. Určete podmíněnou pravděpodobnost, že náhodně vybraný drát bude zapojený (jev A), jestliže je modrý (jev B).

ŘEŠENÍ:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{54}{75} = \frac{18}{25} = 0,72.$$

38. V osudí je 9 koulí bílých a 1 červená koule. Vytáhneme jednu kouli, vrátíme ji a přidáme jednu kouli téže barvy. Pak táhneme podruhé. Určete:

a) jaká je pravděpodobnost, že v obou tazích vytáhneme červenou kouli. b) jaká je pravděpodobnost, že v obou tazích vytáhneme bílou kouli.

c) jaká je pravděpodobnost $P(C_2)$, že ve druhém tahu vytáhneme červenou kouli (nepodmíněnou výsledkem 1.tahu).

ŘEŠENÍ:

a) C_1 - v prvním tahu vytáhneme červenou kouli, C_2 - v druhém tahu vytáhneme červenou kouli. Hledáme $P(C_1 \cap C_2)$. Přitom $P(C_1) = \frac{1}{10}$ a $P(C_2|C_1) = \frac{2}{11}$. Proto $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1|C_2) \cdot P(C_1) = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{110} = 0,018$.

b) B_1 - v prvním tahu vytáhneme bílou kouli, B_2 - v druhém tahu vytáhneme bílou kouli. Hledáme $P(B_1 \cap B_2)$. Přitom $P(B_1) = \frac{9}{10}$ a $P(B_2|B_1) = \frac{10}{11}$. Proto $P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{11} = 0,81$.

c) Máme dvě možnosti, buď vytáhneme v 1.tahu bílou kouli a ve 2. tahu červenou, nebo vytáhneme v 1. i 2. tahu červenou kouli, tj. $P(C_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{11}{110} = \frac{1}{10} = 0,1$.