

PRAVDĚPODOBNOST - ŘEŠENÍ

- Házíme kostkou. Určete množinu všech možných výsledků (Ω) a jevy A, B, C , které vyjadřují: a) A - na kostce padne číslo 3. b) B - na kostce padne liché číslo. c) C - na kostce padlo číslo menší než 5.
ŘEŠENÍ:
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jev $A = 3$. Jev $B = \{1, 3, 5\}$ Jev $C = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Házíme dvěma mincemi. Určete množinu všech možných výsledků (Ω) a jevy A, B , které vyjadřují: a) A - na obou mincích padl rub b) B - alespoň na jedné minci padl rub.
ŘEŠENÍ:
 $\Omega = \{(r, r), (l, l), (r, l), (l, r)\}$. a) Jev $A = \{(r, r)\}$. b) Jev $B = \{(r, r), (r, l), (l, r)\}$.
- Házíme dvěma kostkami. Určete množinu všech možných výsledků (Ω) a množiny A, B, C , které vyjadřují následující jevy: a) A - součet ok bude roven 7 b) B - na obou kostkách padne sudý počet ok c) C - součet ok bude dělitelný 3.
ŘEŠENÍ:
 $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
a) Jev $A = \{(1, 6), (6, 1), (5, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 3)\}$.
b) Jev $B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$.
c) Jev $C = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$
- Student si má vytáhnout 3 z 10 otázek. Je připraven na 5 otázek. Jaký je počet všech možných výsledků? Jaký je počet všech výsledků příznivých jevu: a) A - student vytáhne právě jednu otázku, kterou umí b) student nevytáhne žádnou otázku, kterou umí.
ŘEŠENÍ:
Počet všech možných výsledků: vybíráme 3 otázky z deseti, nezáleží na pořadí: $m = |\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$. a) vybíráme jednu otázku z pěti, které umí a dvě z pěti, které neumí: $m(A) = \binom{5}{1} \binom{5}{2} = 5 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 50$ b) vybíráme tři otázky z pěti, které student umí: $m(B) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ možných výsledků.
- V osudí jsou 4 bílé a 3 modré tikety. Náhodně vybereme 2 tikety. Jaký je počet všech možných výsledků? Jaký je počet všech výsledků příznivých jevu: a) A - oba vytažené tikety budou bílé b) B - jeden vytažený tiket bude bílý a jeden tiket bude modrý.
ŘEŠENÍ:
 $|\Omega|$ = kolika způsoby můžeme vytáhnout 2 tikety ze 7. tj. $m = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ a) $m(A)$ = kolika způsoby můžeme vybrat dva tikety ze 4, tj. $m(A) = \binom{4}{2} = 6$ b) $m(B)$ = kolika způsoby můžeme vybrat jeden tiket bílý a jeden modrý, tj. $m(B) = \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 4 \cdot 3 = 12$.
- Pro libovolné jevy A, B vyjádřete pomocí symboliky pro množiny, že a) nenastal žádný jev b) nastaly oba jevy c) nastal aspoň jeden z těchto jevů d) nastal právě jeden z těchto jevů e) nastal nejvýše jeden z těchto jevů.
ŘEŠENÍ:
 A - nastal jev A , A' - jev opačný k jevu A nebo-li nenastal jev A .
a) $A' \cap B'$ b) $A \cap B$ c) $A \cup B$ d) $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ e) $\Omega - (A \cap B)$.
- Pro libovolné jevy A, B, C vyjádřete pomocí symboliky pro množiny, že: a) nastal jev A b) nastaly jevy A, B , nenastal jev C c) nastaly všechny tři jevy d) nastal alespoň jeden jev e) nastaly aspoň dva jevy f) nenastal žádný jev.

ŘEŠENÍ:

a) A b) $A \cap B \cap C'$ c) $A \cap B \cap C$ d) $A \cup B \cup C$ e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$ f) $A' \cap B' \cap C'$

8. V osudí jsou 4 bílé a 3 černé koule. Z urny vybereme náhodně 3 koule. Jev A - všechny vytažené koule budou černé. Jev B - všechny vytažené koule budou bílé. Jev C - dvě koule budou černé a jedna bílá. Popište následující jevy:

a) A' b) $A \cup B$ c) $A \cap B$ d) $A \cap C$ e) $A \cup C$ f) $C' - A$

ŘEŠENÍ:

a) A' - Alespoň jedna z vytažených koulí bude bílá. b) $A \cup B$ - Všechny vytažené koule budou černé nebo všechny budou bílé. c) $A \cap B$ - Všechny vytažené koule budou černé a zároveň bílé. d) $A \cap C$ - Všechny vytažené koule budou černé a současně dvě koule budou černé a jedna bílá. e) $A \cup C$ - Všechny vytažené koule budou černé nebo dvě vytažené koule budou černé a jedna bílá. f) $C' - A$ - Všechny vytažené koule budou černé nebo bílé nebo bude vytažena jedna koule bílá a dvě černé. $C' - A$ - Všechny vytažené koule budou bílé nebo jedna koule bude bílá a dvě černé.

9. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne: a) číslo větší než 4 b) číslo sudé c) číslo menší než 1 d) číslo 5.

ŘEŠENÍ:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $m = 6$ a) A - padne číslo větší než 4, $A = \{5, 6\}$, $m(A) = 2 \rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ b) B - padne sudé číslo, $B = \{2, 4, 6\}$, $m(B) = 3 \rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ c) C - padne číslo menší než 1, to nemůže nastat, jedná se o jev nemožný, tj. $P(C) = 0$ d) D - padne číslo 5, $D = \{5\}$, $m(D) = 1$, $P(D) = \frac{1}{6}$.

10. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet: a) právě 11 b) alespoň 11 c) menší nebo roven 5 d) právě 2.

ŘEŠENÍ:

$|\Omega| = m = 6 \cdot 6 = 36$ všech možných výsledků pokusu, na první kostce máme 6 možností a na druhé též 6 možností.

a) A - padne právě součet 11, $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$, $m(A) = 2$, $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ b) B - padne součet alespoň 12, $B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$, $m(B) = 3$, $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ c) C - padne součet menší nebo roven 5, $C = \{(4, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$, $m(C) = 10$, $P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ d) D - padne právě součet 2, $D = \{(1, 1)\}$, $m(D) = 1$, $P(D) = \frac{1}{36}$

11. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně zvoleném dvouciferném čísle budou obě cifry stejné?

ŘEŠENÍ:

$|\Omega|$ - počet všech dvouciferných čísel, na první cifru máme 9 možností a na druhé místo 10 možností, není uvedeno, takže se cifry mohou v čísle opakovat. $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$ A - v čísle budou obě cifry stejné, tj. na první cifru máme 9 možností a na druhou cifru musíme dát to stejné, co na první, tj. není možnost výběru a proto je možnost pouze 1. $m(A) = 9 \cdot 1 = 9$, $P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$.

12. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojciferné číslo je dělitelné a) dvěma b) třemi c) čtyřmi d) sedmi e) pěti.

ŘEŠENÍ:

$|\Omega|$ - počet všech dvojciferných čísel, na první cifru máme 9 možností a na druhé místo 10 možností, není uvedeno, takže se cifry mohou v čísle opakovat. $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$

a) A - dvojciferné číslo je dělitelné číslem 2, $m(A) = 45$, na první cifru máme 9 možností (ne číslo 0), na druhou cifru vybereme některou z 5 sudých cifer. $P(A) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$

b) B - dvojciferné číslo dělitelné číslem 3,

$B = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$, $m(B) = 30$, $P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

c) C - dvojciferné číslo dělitelné 4,

$C = \{12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96\}$,

$m(C) = 22$, $P(C) = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$

d) D - dvojciferné číslo je dělitelné 7, $D = \{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$, $m(D) = 13$, $P(D) = \frac{13}{90}$

e) E - dvojciferné číslo dělitelné 5. $m(E) = 9 \cdot 2 = 18$, na první cifru máme 9 možností (ne nulu) na druhou cifru máme 2 možnosti (tj. číslo 0 nebo 5). $P(E) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$

13. Hodíme mincí třikrát po sobě. Jaká je pravděpodobnost, že:

a) A - líc padne častěji než rub. b) B - líc padne právě dvakrát. c) C - výsledek všech hodů bude stejný.

ŘEŠENÍ:

$\Omega = \{(l, l, l), (l, r, l), (l, l, r), (r, l, l), (r, r, l), (r, l, r), (l, r, r), (r, r, r)\}$, $m = |\Omega| = 8$

a) $A = \{(l, l, l), (r, l, l), (l, l, r), (l, r, l)\}$, $m(A) = 4$, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ b) $B = \{(l, l, r), (l, r, l), (r, l, l)\}$, $m(B) = 3$, $P(B) = \frac{3}{8}$ c) $C = \{(r, r, r), (l, l, l)\}$, $m(C) = 2$, $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

14. V osudí je 5 bílých a 4 modré tikety. Náhodně vybereme 2 tikety. Jaká je pravděpodobnost, že budou:

a) oba modré b) oba bílé c) jeden bílý a jeden modrý.

ŘEŠENÍ:

$|\Omega|$ - vybíráme dva tikety z 9, tj. $|\Omega| = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

a) $m(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ b) $m(B) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, $P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ c) $m(C) = \binom{5}{1} \binom{4}{1} = 5 \cdot 4 = 20$, $P(C) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

15. Student si při zkoušce losuje dvě z deseti otázek, přičemž připraven je na 6 z nich. Jaká je pravděpodobnost, že a) bude umět obě b) nebude umět žádnou c) bude umět právě jednu d) bude umět alespoň jednu.

ŘEŠENÍ:

$|\Omega|$ - vybíráme dvě z deseti otázek. $m = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

a) $m(A)$ - vybíráme dvě ze 6 otázek, které umí, $m(A) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, $P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ b)

$m(B)$ - vybíráme dvě ze 4 otázek, které neumí, $m(B) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, $P(B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$ c)

$m(C)$ - vybíráme jednu ze 4 otázek a jednu z 6 otázek, $m(C) = \binom{4}{1} \binom{6}{1} = 4 \cdot 6 = 24$, $P(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ d)

alespoň jednu bude umět znamená, že bude umět jednu otázku a druhou ne, nebo bude umět obě otázky, $m = \binom{4}{1} \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 4 \cdot 6 + \frac{6!}{2!4!} = 24 + 15 = 39$, $P(D) = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$.

16. V krabici je 8 hřebíků, z nichž 5 je železných a 3 mosazné. Náhodně vybereme dva z nich. Jaká je pravděpodobnost, že budou ze stejného materiálu?

ŘEŠENÍ:

$|\Omega|$ - vybíráme 2 hřebíky z osmi, $m = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, A - budou ze stejného materiálu, tj. buď budou oba železné nebo oba mosazné. $m(A) = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = \frac{5!}{2!3!} + 3 = 10 + 3 = 13$, $P(A) = \frac{13}{28}$.

17. Z 26 žáků ve třídě, ve které je 12 chlapců a 14 dívek, se losují 3 zástupci. Jaká je pravděpodobnost, že to budou: a) samé dívky b) dvě dívky a jeden chlapec.

ŘEŠENÍ:

Ω - vybíráme 3 žáky z 26, $m = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3!23!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2} = 2600$.

a) A - vybereme tři dívky ze 14, $m(A) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{3!11!} = 364$, $P(A) = \frac{364}{2600} = 0,14$ b) B - vybereme 2 děvčata ze 14 a 1 chlapce ze 12, $m(B) = \binom{14}{2} \binom{12}{1} = 91 \cdot 12 = 1092$, $P(B) = \frac{1092}{2600} = 0,42$

18. V bedně je 10 součástek, z toho 4 vadné. Z bedny náhodně vybereme 3 z nich. Jaká je pravděpodobnost, že a) budou všechny vadné b) bude právě jedna vadná c) budou všechny dobré d) bude nejvýše jedna vadná.

ŘEŠENÍ:

Ω - vybíráme 3 výrobky z 10. $m = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$.

a) A - vybíráme 3 součástky ze 4 vadných, $m(A) = \binom{4}{3} = 4$, $P(A) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$. b) B - vybíráme 1 ze 4

vadných a 2 součástky ze 6 funkčních, $m(B) = \binom{4}{1} \binom{6}{2} = 4 \cdot \frac{6!}{2!4!} = 4 \cdot 15 = 60$, $P(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. c) C -

vybíráme 3 součástky ze 6 funkčních, $m(C) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$, $P(C) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$. d) D - nejvýše jedna vadná

znamená - bude jedna vadná nebo nebude žádná vadná, tj. vybíráme 3 součástky ze 6 funkčních nebo 1 součástku ze 4 vadných a 2 součástky ze 6 funkčních, $m(D) = \binom{6}{3} + \binom{4}{1}\binom{6}{2} = 20 + 60 = 80$, $P(D) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

19. Jaká je pravděpodobnost, že trojciferné číslo je liché?

ŘEŠENÍ:

Všech trojciferných čísel je $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Liché číslo má na místě jednotek lichou cifru, tj. 1, 3, 5, 7, 9, proto je všech lichých trojciferných čísel $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$, $P(\text{liche}) = \frac{450}{900} = 0,5$.

20. Je známo, že v továrně s denní produkcí 100 hifi věží se v krajních dnech pracovního týdne (pondělí, pátek) vyrábějí méně kvalitní hifi věže než uprostřed týdne. Z týdenní produkce vybereme náhodně 10 hifi věží. Jaká je pravděpodobnost, že všech 10 bylo vyrobeno uprostřed týdne (úterý až čtvrtek)?

ŘEŠENÍ:

V továrně se za týden vyrobí 500 hifi věží, přičemž 200 z nich je kvalitnějších (Po, Pa) než 300 zbývajících (Út, St, Čt). Ze všech vybereme náhodně 10. $m = \binom{500}{10}$, A - vybereme 10 z těch méně kvalitnějších,

$$m(A) = \binom{300}{10}. P(A) = \frac{\binom{300}{10}}{\binom{500}{10}} = \frac{300!}{10!290!} \cdot \frac{10!490!}{500!} = \frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296 \cdot 295 \cdot 294 \cdot 293 \cdot 292 \cdot 291}{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496 \cdot 495 \cdot 494 \cdot 493 \cdot 492 \cdot 491} \cong 0,0057.$$

21. Házáme dvěma mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že a) aspoň na jedné straně rub b) na obou padne líc?

ŘEŠENÍ:

$\Omega = \{(l, l), (r, l), (l, r), (r, r)\}$, $m = 2 \cdot 2 = 4$ a) A - aspoň na jedné straně rub tj. $A = \{(r, l), (l, r), (r, r)\}$, $P(A) = \frac{3}{4} = 0,75$. b) B - na obou padne líc, tj. $B = \{(l, l)\}$, $m(B) = 1$, $P(B) = \frac{1}{4} = 0,25$.

22. Dvakrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že a) aspoň jednou padne šestka b) ani jednou nepadne šestka c) na obou kostkách padne totéž číslo?

ŘEŠENÍ:

Na každé kostce může nastat 6 možností, $m = 6 \cdot 6 = 36$.

a) A - alespoň jednou padne šestka znamená, že na první kostce padne 6 a na druhé cokoliv a nebo naopak, $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$, $m(A) = 11$, $P(A) = \frac{11}{36}$ b) B - šestka nepadne ani jednou, B' - šestka padne alespoň jednou, $m(B') = 11$, $m(B) = m - m(B') = 36 - 11 = 25$, $P(B) = \frac{25}{36}$ nebo využijeme pravděpodobnosti opačného jevu, tj. $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$. c) C - na obou kostkách stejné číslo, $m(C) = 6 \cdot 1 = 6$, $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

23. Třikrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že a) aspoň jednou padne šestka b) šestka nepadne ani jednou c) šestka padne právě dvakrát?

ŘEŠENÍ:

Na každé kostce může nastat 6 možností, $m = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$,

a) A - aspoň jednou padne šestka, A' - nepadne žádná 6, tj. na každou kostku máme pouze 5 možností, $m(A') = 5^3 = 125$, $P(A') = \frac{125}{216}$, $P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \cong 0,421$ b) B - šestka nepadne ani jednou = A' (viz.a), $P(B) = \frac{125}{216} \cong 0,579$ c) C - šestka padne právě dvakrát, vybereme 2 kostky ze 3, na kterých padne 6, na třetí kostku máme již pouze 5 možností, protože 6 už nesmí padnout. $m(C) = \binom{3}{2} \cdot 5 = 15$, $P(C) = \frac{15}{216} = 0,0694$.

24. Deset volejbalových družstev bylo na turnaji náhodně (losem) zařazeno do dvou skupin. Jaká je pravděpodobnost, že dvě nejslabší družstva se dostanou a) do různých skupin b) do téže skupiny?

ŘEŠENÍ:

Deset družstev dělíme na dvě skupiny, tj. vybíráme 5 družstev z 10, které budou tvořit jednu skupinu. Celkem možností: $m = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$. a) A - nejslabší družstva v různých skupinách, každé družstvo umístíme do jedné ze skupin, to lze učinit 2 způsoby, poté k nim dovybereme 4 družstva ze zbývajících osmi, tj. $m(A) = 2 \cdot \binom{8}{4} = 2 \cdot \frac{8!}{4!4!} = 2 \cdot 70 = 140$, $P(A) = \frac{140}{252} = 0,55$. b) B = nejslabší družstva budou ve stejné skupině, vybereme jednu ze dvou skupin, kam je umístíme a pak dovybereme 3 ze zbývajících 8 skupin. tj. $m(B) = \binom{2}{1} \binom{8}{3} = 2 \cdot \frac{8!}{3!5!} = 2 \cdot 56 = 112$, $P(B) = \frac{112}{252} = 0,44$.

25. V pokladně divadla zůstalo 10 posledních vstupenek, 4 vedle sebe do první řady, 6 vedle sebe do třetí řady. Dva přátelé si koupili nezávisle na sobě po jedné vstupence. Jaká je pravděpodobnost, že budou sedět ve stejné řadě?

ŘEŠENÍ:

dva přátelé budou sedět ve stejné řadě tj. buď budou sedět v první řadě (A) nebo budou sedět ve třetí řadě (B). Hledáme pravděpodobnost jevu $A \cup B$. Jevy se navzájem vylučují ($A \cap B = \emptyset$), proto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Vybíráme 2 vstupenky z 10 možných, tj. $m = \binom{10}{2} = 45$. Nezáleží na pořadí.

$$m(A) = \binom{4}{2} = 6, P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} = 0,1\bar{3}$$

$$m(B) = \binom{6}{2} = 15, P(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 0,3$$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{45} + \frac{15}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} = 0,4\bar{6}.$$

26. V tombole je 20 cen a bylo prodáno 1000 lístků. Někdo si koupil dva lístky. Jaká je pravděpodobnost, že a) na oba lístky vyhraje nějakou cenu b) alespoň na jeden lístek vyhraje nějakou cenu?

ŘEŠENÍ:

Vybíráme 20 vyhrávajících lístků z 10, $m = \binom{1000}{20}$.

a) A - koupíme 2 lístky, které vyhrají, tj. vytáhneme právě ty dva z těch 20 tažených. $m(A) = \binom{20}{2} = 190$, $P(A) = \frac{190}{\binom{1000}{20}} = 0,00038$ (Výpočet u některých kalkulaček není možný, vypočteno počítačem, jako výsledek stačí zlomek.)

b) B - alespoň na jeden lístek vyhraje, použijeme opačný jev B' - nevyhraje ani na jeden lístek, $m(B') = \binom{980}{20}$, $P(B') = \frac{\binom{980}{20}}{\binom{1000}{20}}$, $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\binom{980}{20}}{\binom{1000}{20}} = 0,0396$.

27. Předpokládejme, že 23letý ženich si bere 20 – 23letou nevěstu, přičemž pravděpodobnost pro jednotlivé roky (věk nevěsty) jsou $p_{20} = 0,3295$, $p_{21} = 0,2712$, $p_{22} = 0,2216$, $p_{23} = 0,1778$. Jaká je pravděpodobnost, že si ženich vezme aspoň o 1 rok mladší nevěstu?

ŘEŠENÍ:

Sečteme pravděpodobnosti odpovídající výsledkům příznivých jevu, že ženich si vezme aspoň o 1 rok mladší nevěstu: $P = p_{20} + p_{21} + p_{22} = 0,3295 + 0,2712 + 0,2216 = 0,8223$.

28. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne:

a) šestka b) číslo větší než jedna c) číslo deset?

ŘEŠENÍ:

$m = 6$, a) A - padne šestka, $m(A) = 1$, $P(A) = \frac{1}{6}$ b) B - padne číslo větší než jedna, $m(B) = 5$, $P(B) = \frac{5}{6}$ c) C - číslo 10, jev je nemožný, takové číslo na běžné kostce nenajdeme, $P(C) = 0$.

29. Hodíme dvěma kostkami, červenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) na obou kostkách padne šestka b) na obou kostkách padne liché číslo c) alespoň na jedné kostce padne liché číslo

d) bude součet bodů na kostkách 5 e) bude součet bodů na kostkách menší nebo rovno 4.

ŘEŠENÍ:

$m = 6 \cdot 6 = 36$ a) A - na obou kostkách padne číslo 6, $m(A) = 1$, $P(A) = \frac{1}{36}$ b) B - na obou padne liché číslo, tj. na první kostce máme 3 možnosti a na druhou též, $m(B) = 3 \cdot 3 = 9$, $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$. c) C - alespoň na jedné kostce padne liché číslo znamená, že buď padne na jedné kostce liché číslo a na druhé sudé a naopak a nebo padne na obou kostkách číslo liché. $m(C) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 9 = 27$, $P(C) = \frac{27}{36} = 0,75$. Bylo by možné počítat i přes jev opačný C' - na obou kostkách padne číslo sudé, $m(C') = 3 \cdot 3 = 9$, $P(C') = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$, $P(C) = 1 - P(C') = 0,75$. d) D - součet bodů na kostkách bude 5, $D = \{(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)\}$, $m(D) = 4$, $P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ e) E - součet bodů na kostkách je menší nebo rovno 4. $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$, $m(E) = 6$, $P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

30. Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne alespoň jedno sudé číslo b) padne dvojice sudých čísel c) padne součet 8 d) padne součet větší než 10?

ŘEŠENÍ:

$m = 6 \cdot 6 = 36$ a) A - padne alespoň jedno sudé číslo, A' - nepadne sudé číslo na žádné kostce, $m(A') = 3 \cdot 3 = 9$, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. b) B - padne dvojice sudých čísel tj. $B = A'$, $P(B) = \frac{9}{36} = 0,25$ c) C - padne součet 8, $C = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$, $m(C) = 5$, $P(C) = \frac{5}{36}$ d) D - padne součet větší než 10, $D = \{(6, 6), (6, 5), (5, 6)\}$, $m(D) = 3$, $P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

31. Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne právě jedna čtyřka b) padne nejvýše jednou čtyřka c) nepadne ani jednou čtyřka d) padne alespoň jednou čtyřka ?

ŘEŠENÍ:

$m = 6 \cdot 6 = 36$, a) A - padne právě jedna čtyřka, vybereme jednu ze dvou kostek, na které padne číslo 4, na druhé kostce máme 5 možností, $m(A) = 2 \cdot 5 = 10$, $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ b) B - padne nejvýše jednou čtyřka, tj. nepadne vůbec nebo padne právě jednou. $m(B) = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 25 + 10 = 35$, $P(B) = \frac{35}{36}$. Dalo by se počítat i přes opačný jev, tj. B' - padnou právě dvě čtyřky, $m(B') = 1$, $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ c) C - nepadne ani jednou čtyřka, $m(C) = 5 \cdot 5 = 25$, $P(C) = \frac{25}{36}$ d) D - padne alespoň jedna čtyřka znamená, že padne právě jedna čtyřka a nebo padnou obě čtyřky, $m(D) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$, $P(D) = \frac{11}{36}$

32. Hodíme třikrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne právě jedna čtyřka b) padne nejvýše jednou čtyřka c) padne alespoň jednou čtyřka d) nepadne ani jednou čtyřka?

ŘEŠENÍ:

$m = 6^3 = 216$, a) A - padne právě jedna čtyřka, máme 3 možnosti, jak vybrat kostku, na které padne 4, na obou zbylých kostkách máme 5 možností, $m(A) = 3 \cdot 5^2 = 75$, $P(A) = \frac{75}{216} = \frac{25}{72} \cong 0,347$ b) B - padne nejvýše jednou čtyřka, tj. padne právě jedna čtyřka a nebo nepadne žádná čtyřka, $m(B) = 3 \cdot 5^2 + 5^3 = 75 + 125 = 200$, $P(B) = \frac{200}{216} = 0,925$ c) C - padne alespoň jednou čtyřka, C' - nepadne ani jednou čtyřka, $m(C') = 5^3 = 125$, $P(C') = \frac{125}{216}$, $P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$ d) D - nepadne ani jednou čtyřka, $D = C'$, $P(D) = \frac{125}{216} \cong 0,579$

33. Hodíme třemi kostkami. Hráč A vyhraje, padne-li součet bodů 10, hráč B vyhraje, padne-li součet bodů 11. Padne-li jiný součet, nevyhraje nikdo, hráči házejí znova. Který z hráčů má větší pravděpodobnost výhry?

ŘEŠENÍ:

Na kostky se díváme jako na rozlišitelné, na každé kostce máme šest možností, tj. $m = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ možných výsledků.

A - padne součet bodů 10, vypíšeme všechny možnosti i s jejich násobností.

$A = \{6x(1, 3, 6), 6x(1, 4, 5), 6x(2, 3, 5), 3x(2, 2, 6), 3x(2, 4, 4), 3x(3, 3, 4)\}$, např.: $6x(1, 3, 6)$ znamená, že součet 10 padne, padnou-li na kostkách číslice 1, 3, 6, protože kostky rozlišujeme, můžeme čísla na kostkách seřadit $3! = 6$ způsoby, např.: $3x(2, 2, 6)$ znamená, že součet 10 padne, padnou-li na kostkách číslice 2, 2, 6, protože kostky rozlišujeme, může číslo 6 být na třech rozlišitelných kostkách, tj. existují 3 možnosti. $m(A) = 27$, $P(A) = \frac{27}{216}$.

B - padne součet bodů 11, vypíšeme všechny možnosti i s jejich násobností.

$B = \{6x(1, 4, 6), 6x(2, 3, 6), 6x(2, 4, 5), 3x(1, 5, 5), 3x(3, 3, 5), 3x(3, 4, 4)\}$, $m(B) = 27$, $P(B) = \frac{27}{216}$. Oba hráči mají stejnou pravděpodobnost výhry.

34. Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním, nebo druhém, nebo třetím hodu padne sudé číslo.

ŘEŠENÍ:

Nezajímají nás konkrétní čísla, zajímá nás pouze, zda padne číslo sudé nebo liché. Příklad lze převést na hod mincí. $\Omega = \{(s, s, s), (s, l, s), (s, s, l), (l, s, s), (l, l, s), (l, s, l), (s, l, l), (l, l, l)\}$, kde l - liché číslo, s - sudé číslo. $m = 8$, $m(A) = 7$, $P(A) = \frac{7}{8}$.

35. Jaká je pravděpodobnost, že při třech hodech jednou mincí padne alespoň dvakrát líc?

ŘEŠENÍ:

$\Omega = \{(r, r, r), (r, l, r), (l, r, r), (r, r, l), (l, l, r), (l, r, l), (r, l, l), (l, l, l)\}$, $m = 8$, $m(A) = 4$, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

36. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi mincemi najednou padne alespoň na dvou mincích líc?

ŘEŠENÍ:

$\Omega = \{(r, r, r), (r, l, r), (l, r, r), (r, r, l), (l, l, r), (l, r, l), (r, l, l), (l, l, l)\}$, $m = 8$, $m(A) = 4$, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Není rozdíl, zda hodíme jednou mincí třikrát po sobě, nebo třemi mincemi současně.

37. * Kolikrát musíme hodit kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než

a) 0,5 b) 75%?

ŘEŠENÍ:

Předpokládáme, že házíme kostkou k -krát. Pak $m = 6^k$, na každou kostku máme 6 možností, jaké může padnout číslo. Jev A - padne alespoň na jedné kostce šestka. Použijeme jev opačný, tj. A' - nepadne ani jednou šestka, tj. na každou kostku máme pouze 5 možností, které číslo může padnout. $m(A') = 5^k$. $P(A) = 1 - P(A')$, $P(A) = 1 - \frac{5^k}{6^k}$

a) $P(A) > 0,5$, tj. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k > 0,5$, upravíme a pomocí zlogaritmování vypočteme:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^k < 0,5 / \log$$

$$k \cdot \log \frac{5}{6} < \log 0,5 / : \log \frac{5}{6}$$

dělíme číslem záporným, tj. musíme změnit znaménko:

$$k > 3,8$$

Kostkou musíme hodinu alespoň 4krát.

b) a) $P(A) > 0,75$, tj. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k > 0,75$, upravíme a pomocí zlogaritmování vypočteme:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^k < 0,25 / \log$$

$$k \cdot \log \frac{5}{6} < \log 0,25 / : \log \frac{5}{6}$$

dělíme číslem záporným, tj. musíme změnit znaménko:

$$k > 7,6$$

Kostkou musíme hodinu alespoň 8krát.

38. Hodíme pětkrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát?

ŘEŠENÍ:

Na každé kostce můžeme hodit jedno ze 6 možných čísel, tj. $m = 6^5$. A - padne šestka právě dvakrát. Počet příznivých výsledků jevu A obdržíme takto: vybereme 2 z 5 kostek, kde padne číslo 6, na každou ze zbývajících 3 kostek máme 5 možností, jaké číslo může padnout. $m(A) = \binom{5}{2} \cdot 5^3 = 1250$. $P(A) = \frac{1250}{7776} = 0,161$.

39. S jakou pravděpodobností padne při deseti hodech jednou kostkou alespoň třikrát šestka?

ŘEŠENÍ:

Při každém hodu může na kostce padnout jedno ze 6 možných čísel, tj. $m = 6^{10}$, A - padne alespoň třikrát šestka. Využijeme jev opačný, A' - padne nejvýše dvakrát šestka = nepadne šestka nebo padne právě jednou šestka nebo padne právě dvakrát šestka.

B - nepadne šestka, $m(B) = 5^{10}$, $P(B) = \frac{5^{10}}{6^{10}}$

C - padne právě jednou šestka, vybereme jeden hod z 10 možných, kdy padne šestka, pro ostatní hody již máme pouze 5 možností, jaké číslo může padnout. $m(C) = \binom{10}{1} \cdot 5^9$, $P(C) = \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}}$

D - padne šestka právě dvakrát, vybereme dva hody z 10 možných, kdy padne šestka, pro ostatní hody již máme pouze 5 možností, jaké číslo může padnout. $m(D) = \binom{10}{2} \cdot 5^8$, $P(D) = \frac{45 \cdot 5^8}{6^{10}}$

$A' = B \cup C \cup D$, jevy se navzájem vylučují, tj. $B \cap C = B \cap D = C \cap D = B \cap C \cap D = \emptyset$. Proto $P(A') = P(B \cup C \cup D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5^{10} + 10 \cdot 5^9 + 45 \cdot 5^8}{6^{10}} = 0,775$ Nyní určíme $P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,775 = 0,225$.

40. Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný den?

ŘEŠENÍ:

Předpokládáme, že rok má 365 dní. Jana i Tomáš mají 365 možností, kdy se mohli narodit. $m = 365^2$. A - narodí se ve stejný den, tj. Jana má možnost narodit se v jeden z 365 dnů, Tomáš se narodí jako Jana, tj. má jen jednu možnost. $m(A) = 365 \cdot 1 = 365$, $P(A) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365} = 0,003$.

41. Co je pravděpodobnější? Hodit při čtyřech hodech kostkou právě jednu šestku, nebo hodit při osmi hodech dvěma kostkami právě jednu dvojici šestek?

ŘEŠENÍ:

Nejprve určíme pravděpodobnost, že při čtyřech hodech kostkou padne právě jedna šestka (A). $m = 6^4 = 1296$, A - padne právě jedna šestka, vybereme jeden hod ze 4, kdy padne šestka, na další hody máme již jen 5 možností, $m(A) = \binom{4}{1} \cdot 5^3 = 500$, $P(A) = \frac{500}{1296} = 0,386$.

Určíme pravděpodobnost, že při osmi hodech dvěma kostkami padne právě jedna dvojice šestek (B). Házet dvěma kostkami desetkrát je totéž, jako házet 16 kostkami najednou s tím, že pak výslednou šestnáctici rozdělíme po dvojicích. $m = 6^{16}$ - na každou kostku máme 6 možností. $m(B)$ - vybereme jednu dvojici z 8, kde padne právě jedna dvojice šestek, pro každou z ostatních dvojic máme 35 možností a dvojic zbývá 7, tj. $m(A) = \binom{8}{1} \cdot 35^7 = 8 \cdot 35^7$. $P(B) = \frac{8 \cdot 35^7}{6^{16}} = 0,182$. Pravděpodobnější je hodit při čtyřech hodech kostkou právě jednu šestku.

42. Ve skupině je 10 děvčat a 18 chlapců. Náhodně vybereme skupinu 3 studentů. S jakou pravděpodobností jsou ve vybrané skupině 2 děvčata a jeden chlapec?

ŘEŠENÍ:

Vybíráme 3 studenty z 28 studentů. $m = \binom{28}{3} = 3276$.

A - bude vybrán jeden chlapec a dvě děvčata. $m(A) = \binom{18}{1} \binom{10}{2} = 18 \cdot \frac{10!}{2!8!} = 18 \cdot 45 = 810$, $P(A) = \frac{810}{3276} = 0,247$

43. Ve třídě je 30 žáků. Právě pět z nich nemá domácí úkol. Učitel náhodně kontroluje 6 žáků. Vypočítejte pravděpodobnost, že nejvýše dva žáci, které učitel kontroluje, nemají domácí úkol.

ŘEŠENÍ:

Vybíráme 6 studentů z 30 studentů. $m = \binom{30}{6} = 593775$

A - nejvýše dva z kontrolovaných nemá domácí úkol; nejvýše dva znamená žádný (vybíráme 6 studentů z 25) nebo jeden (vybíráme 1 studenta z 5 a 5 studentů z 25) nebo dva (vybíráme 2 studenty z 5 a 4 studenty z 25). $m(A) = \binom{25}{6} + \binom{5}{1} \binom{25}{5} + \binom{5}{2} \binom{25}{4} = 177100 + 265650 + 126500 = 569250$, $P(A) = \frac{569250}{593775} = 0,959$.

44. Dvanáct studentů, mezi kterými je Pavel a Tomáš, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině bude:

a) Tomáš b) Tomáš, ale ne Pavel c) Tomáš a Pavel d) Tomáš nebo Pavel?

ŘEŠENÍ:

Vybíráme čtyři studenty z dvanácti, $m = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = 495$.

Označíme jevy: A - ve skupině bude Pavel, B - ve skupině bude Tomáš.

A - ve skupině je Pavel, proto dále dovybíráme další 3 studenty z 11. $m(A) = \binom{11}{3} = 165$, $P(A) = \frac{165}{495} = \frac{1}{3}$.

a) Jev B má stejnou pravděpodobnost jako jev A, $P(B) = \frac{1}{3}$.

b) C - Tomáš, ale ne Pavel. Tomáš bude ve skupině, ale Pavel ne, proto dovybíráme ještě další 3 studenty z 10. $m(C) = \binom{10}{3} = 120$, $P(C) = \frac{120}{495} = 0,24$.

c) $A \cap B$ - ve skupině bude Tomáš i Pavel, dovybíráme ještě další dva studenty z 10, $m(A \cup B) = \binom{10}{2} = 45$, $P(A \cup B) = \frac{45}{495} = \frac{1}{11} = 0,09$.

d) $A \cup B$ - skupině bude Pavel nebo Tomáš. Využijeme sčítání pravděpodobností. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{11+11-3}{33} = \frac{19}{33} = 0,57$.

45. Šest studentek a osm studentů, mezi kterými jsou Jana a David, mají vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými bude:

a) Jana a David b) Jana nebo David c) David d) Jana, ale David ne?

ŘEŠENÍ:

Vybíráme čtyři studenty ze 14 studentů. $m = \binom{14}{4} = 1001$.

Označíme si jevy: J - ve skupině bude Jana, D - ve skupině bude David. $m(J) = \binom{13}{3} = 286$, $P(J) = \frac{286}{1001} = \frac{26}{91} = 0,286$. Stejně pravděpodobný je i jev D. $P(D) = \frac{26}{91}$

a) $J \cap D$ - ve skupině je Jana a David, dovybereme ještě dva studenty z 12, $m(J \cap D) = \binom{12}{2} = 66$, $P(J \cap D) = \frac{66}{1001} = \frac{6}{91} = 0,066$

b) $J \cup D$ - ve skupině je Jana nebo David, využijeme sčítání pravděpodobností. $P(J \cup D) = P(J) + P(D) - P(J \cap D) = \frac{26}{91} + \frac{26}{91} - \frac{6}{91} = \frac{46}{91} = 0,505$.

c) $P(D) = \frac{26}{91} = 0,286$.

d) E - Jana, ale ne David, k Janě dovybereme ještě další tři studenty z 12 studentů. $m(E) = \binom{12}{3} = 220$, $P(E) = \frac{220}{1001} = \frac{20}{91} = 0,220$.

46. Plnou dřevěnou krychli o hraně 4 cm, natřenou modře, rozřežeme na jednotkové krychličky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička

a) má právě 2 modré stěny b) nemá žádnou modrou stěnu?

ŘEŠENÍ:

Dřevěnou kouli rozřežeme na $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ jednotkových krychliček. Náhodně vytáhneme jednu krychličku, máme 64 možností. $m = 64$.

a) A - má právě 2 modré stěny, těchto kostek je 32, $P(A) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

b) B - nemá žádnou stěnu modrou, těchto kostek je 8, $P(B) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 0,125$.

47. Jaká je pravděpodobnost, že ve sportce (bez dodatkového čísla) neuhádneme ani jedno ze šesti tažených čísel?

ŘEŠENÍ:

Všech možností, jak vytáhnout šest čísel ze 49 je $m = \binom{49}{6}$.

A - neuhádneme žádné ze šesti tažených čísel, $m(A) = \binom{43}{6}$. $P(A) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = 0,436$.

48. V obchodě mají 12 párů ponožek, z nichž 3 páry jsou děravé. Zákazník si vybere a koupí 3 páry. Jaká je pravděpodobnost, že si vybral právě ty tři děravé páry?

ŘEŠENÍ:

Vybíráme 3 páry z 12 párů. $m = \binom{12}{3} = 220$, A - všechny páry budou děravé. $m(A) = \binom{3}{3} = 1$, $P(A) = \frac{1}{220} = 0,0045$.

49. Zvolíme náhodně rodinu s 3 dětmi. Jaká je pravděpodobnost jevu:

a) všechny 3 děti jsou dívky, nebo nejmladší je chlapec? b) dvě nejstarší děti jsou dívky, nebo jsou všechny 3 děti stejného pohlaví.

ŘEŠENÍ:

$\Omega = \{(d, d, d), (d, h, d), (h, d, d), (d, d, h), (d, h, h), (h, d, h), (h, h, d), (h, h, h)\}$, $m = 8$.

a) A - všechny 3 děti jsou dívky nebo nejmladší je chlapec. $A = \{(d, d, d), (d, d, h), (h, d, h), (d, h, h), (h, h, h)\}$, $m(A) = 5$, $P(A) = \frac{5}{8} = 0,625$.

b) B - dvě nejstarší jsou dívky, nebo jsou všechny děti stejného pohlaví. $B = \{(d, d, d), (h, h, h), (d, d, h)\}$, $m(B) = 3$, $P(B) = \frac{3}{8} = 0,375$.